A TEORIA ESPECTRAL E DOENÇAS INFECCIOSAS DE TRANSMISSÃO DIRETA

Este exemplar corresponde à redação da tese devidamente corrigida e defendida por Cláudia Helena Dezotti e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de junho de 2000.

Prof. Dr. Hyun Mo Yang

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Hyun Mo Yang
Prof. Dr. Eduardo Massad
Prof. Dr. Luciano Barbanti
Profa. Dra. Márcia Miguel Castro Ferreira
Profa. Dra. Renata Zotin Gomes Oliveira
Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
Prof. Dr. Wilson Castro Ferreira Júnior

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação - Científica, UNICAMP,** como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTORA em Matemática Aplicada

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Dezotti, Cláudia Helena

D535t A teoria espectral e doenças infecciosas de transmissão direta / Cláudia Helena Dezotti -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : Hyun Mo Yang

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Epidemiologia – Modelos matemáticos. 2. Operadores integrais. 3. Teoria espectral. I. Yang, Hyun Mo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

IMECC - UNICAMP
2000

Tese de Doutorado sob orientação do Prof. Dr. Hyun Mo Yang

A TEORIA ESPECTRAL E DOENÇAS INFECCIOSAS DE TRANSMISSÃO DIRETA

Cláudia Helena Dezotti

Tese de Doutorado defendida em 30 de junho de 2000

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). HYUN MO YANG

Prof (a). Dr (a). EDUARDO MASSAD

Prof (a). Dr (a). LUCIANO BARBANTI

Prof (a). Dr (a). MÁRCIA MIGUEL CASTRO FERREIRA

Prof (a). Dr (a). RENATA ZOTIN GOMES OLIVEIRA

Prof (a). Dr (a). RODNEY CARLOS BASSANEZI

Prof (a). Dr (a). WILSON CASTRO FERREIRA JÚNIOR

Resumo

No estudo de doenças infecciosas de transmissão direta, um parâmetro epidemiológico de interesse é o Número de Reprodutibilidade Basal. Ele representa a capacidade intrínseca que um microorganismo tem de invadir e se estabelecer em uma comunidade, podendo ser definido como o número total de infecções secundárias que um único indivíduo infeccioso primário é capaz de produzir em uma população totalmente suscetível durante o período de infectividade. Por sua própria definição, pode-se ver a impossibilidade do cálculo direto deste parâmetro epidemiológico, sendo que o mesmo deve ser obtido de forma indireta.

Outro parâmetro útil no estudo epidemiológico da disseminação de uma doença em uma população é a força de infecção, que é definida como a incidência *per capita*, ou seja, o número de novos casos por unidade de tempo *per capita*, e representa a "velocidade" com que uma doença se propaga em uma comunidade.

A partir de um modelo idade-estruturado, caracterizamos o Número de Reprodutibilidade Basal como o raio espectral da derivada de Fréchet de um operador integral, e estabelecemos limites inferior e superior para o mesmo. Além disto, da equação integral obtemos condições para que a força de infecção tenha uma solução distinta de zero e única, sendo esta obtida via uma seqüência recursiva. Também estudamos o comportamento dos resultados obtidos frente a diferentes taxas de contato. Usamos para tanto a Teoria Espectral e a teoria de Análise Funcional Não-linear em espaços de Banach com cones.

Abstract

In order to analyze the spread out of directly transmitted infectious diseases, we must obtain a significant epidemiological parameter, which is the Basic Reproductive Number. It represents whether if a parasite is capable of invading, and establishing itself within, a host population, and can be defined as the number of secundary infections produced when one infected individual is introduced into a host population totaly susceptible. By its definition, it is difficult to assess this epidemiological parameter directly, then it must be indirectly measured.

Other useful parameter in the epidemiological study is the force of infection, which is defined as the *per capita* incidence rate, that is, the *per capita* number of the new cases of the infection in a population per period of time, and it represents the "velocity" of spread out of disease in a community.

Considering an age-structured model we obtained a characterization for the basic reproductive ratio as the spectral radius of a Fréchet derivative of an integral operator and estimations for the upper and lower bounds. Moreover, we stablish conditions for the uniqueness of the non-trivial solution, which can be attained by successive approximations. Also, we analysed different kinds of contact rates. We used the Spectral Theory and results from Nonlinear Functional Analysis on Banach spaces with cone.

"Abri, Senhor, o meu coração à Vossa lei. Ensinai-me a trilhar o caminho de Vossos mandamentos.

Dá-me a graça de conhecer Vossa vontade, para que possa render-Vos dignas ações de graças. Quem maiores graças recebeu não pode vangloriar-se do seu mérito nem exaltar-se acima dos outros, pois maior e melhor é quem menos atribui a si mesmos tais benefícios; de Vós procedem todas as coisas.

Nada deve alegrar tanto quem Vos ama que a chance de poder cumprir a Vossa vontade. Porque a Vossa vontade e o amor de Vossa glória devem consolar todos e agradar mais que os benefícios presentes e futuros."

Kempis
"Imitação de Cristo"

Ao meu filho, Carlos.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Hyun, pela orientação, incentivo e paciência durante todo o tempo do doutorado.

Aos professores do grupo da Biomatemática por sua colaboração na minha formação como pesquisadora.

Ao Prof. Aloísio Freiria Neves, pela ajuda em tópicos que sem seu auxílio dispenderiam muito mais tempo que o gasto.

Ao Prof. David Greenhalgh, da Universidade de Strathclyde, Glasgow, UK, pelas correções e sugestões.

A Banca Examinadora por suas correções e sugestões.

Aos colegas do Departamento de Matemática do CCET-UFRN, que assumindo minhas incumbências, permitiram-me estar aqui para realizar esta tarefa.

À Capes/Picdt e Fapesp/proc. 97/12543-4, pelo apoio financeiro prestado.

Aos meus pais, Lúcio e Maria Helena, sem os quais este trabalho seria impossível de ser concluído.

Ao meu filho Carlos, pela compreensão às minhas constantes ausências.

Aos funcionários do IMECC, em particular, às secretárias da Pós-Graduação, Maria Ap. Miccerini de Almeida, e da Matemática Aplicada, Angles Fátima T. Espíndola, pelo apoio logístico durante todo decorrer desta jornada.

Aos amigos do IMECC, em particular, às amigas Rosane de Oliveira, Sidinéia Barrozo, Sílvia Martorano Raimundo, Margarete Domingues, Renata Sossae e Renata Zotin, pelo apoio, ajuda, guarida e companheirismo a toda prova.

Por último, mesmo sendo o mais importante, a Deus, que me propiciou a oportunidade de vivenciar tudo isto.

Cláudia

Índice

INTRODUÇÃO

O primeiro modelo matemático epidemiológico conhecido data de 1760 e é da autoria de Daniel Bernoulli [8]. Ele fez uso da modelagem matemática a fim de avaliar a eficiência das técnicas de imunização artificial contra varíola auxiliando na elaboração de políticas de saúde pública. Segue-se então um vácuo até meados do século dezenove quando, em 1840, Willian Farr [14] realizou um ajuste estatístico de dados sobre mortes causadas pela varíola na Inglaterra e País de Galles no período 1837-9 tentando descrever o curso da epidemia. No entanto, uma contribuição decisiva na modelagem matemática de epidemias é devida a Hamer e Ross. Eles foram os primeiros a formular princípios matemáticos sobre a transmissão de doenças infecciosas e investigar as propriedades resultante dos modelos estabelecidos com base nas teorias matemáticas postuladas. Em 1906 Hamer [21] postulou que o curso de uma epidemia depende da taxa de contato entre indivíduos suscetíveis (aptos a adquirir a doença) e indivíduos infecciosos (aptos a transmitir a doença). Originalmente a formulação era para um modelo de tempo discreto. Mais tarde, Ross [32], [33], [34], [35], postulou uma lei equivalente em seus trabalhos sobre a dinâmica da malária utilizando um modelo de tempo contínuo. Este princípio é conhecido como **Lei de Ação das Massas,** em que a taxa de espalhamento de uma infecção é proporcional ao produto da densidade dos indivíduos suscetíveis pela densidade dos indivíduos infecciosos. A segunda pilastra dos modelos matemáticos epidemiológicos é devida a Kermack e McKendrick [24], em 1927, em que estabeleceram a **Teoria do Limiar.** Tal teoria estabelece que a introdução de um pequeno número de indivíduos infecciosos em uma comunidade de suscetíveis não é capaz de se alastrar como um surto epidêmico a menos que a densidade (ou o número) de suscetíveis esteja acima de um certo valor crítico, denominado **limiar.** A Lei de Ação das Massas conjuntamente com a Teoria do Limiar formam a base da moderna teoria matemática epidemiológica.

A partir de então a literatura em modelos matemáticos epidemiológicos tem aumentado rapidamente. Os trabalhos mais recentes enfocam os mais distintos problemas como: a aplicação da teoria de controle aos modelos epidemiológicos, o espalhamento espacial de doenças, os mecanismos envolvidos no comportamento recorrente das epidemias, a importância da heterogeneidade na transmissão de doenças infecciosas e a extensão da Teoria do Limiar aos modelos determinísticos e estocásticos mais complexos.

Os modelos matemáticos não só auxiliam a interpretar e prever as tendências de uma epidemia, mas também orientam na coleta de dados e no estabelecimento de programas de controle. O bom desempenho de um modelo depende da ação conjunta e equilibrada das variáveis que determinam o curso da infecção no indivíduo com as variáveis que controlam o padrão de infecção na comunidade. Sendo assim é importante conhecer o número de variáveis referentes à população e as consequentes equações envolvidas na descrição do sistema, as relações entre os vários parâmetros (como taxa de nascimento, taxa de mortalidade, taxa de recuperação e taxa de contato) e se as equações matemáticas capturam a essência do processo de transmissão.

Estamos interessados na modelagem de uma doença infecciosa de transmissão direta cujo agente patológico causador é classificado como microparasita. Faz-se o diagnóstico da doença determinando o estado de saúde ou doença do indivíduo, ou seja, não existe a preocupação com o grau de severidade da doença (isto é, a abundância do parasita no hospedeiro). Sendo assim, os modelos compartimentais, aqueles em que a população é dividida em compartimentos, prestam-se bem à modelagem das doenças causados por microparasitas.

Neste caso, muitos dos parâmetros epidemiológicos e demográficos podem ser medidos diretamente por estudos apropriados, como taxas de nascimento e mortalidade, taxa de mortalidade induzida pela doença, taxa de recuperação e taxa de perda de imunidade. Contudo, sendo a taxa de contato uma combinação de fatores biológicos, sociais e de meio ambiente, tal medida direta não é possível. Freqüentemente ela é inferida indiretamente pela medida de outros parâmentros.

A **força de infecção $\boldsymbol{\lambda}$** é definida como a taxa *per capita* de aquisição da infecção e $\lambda(t)\,\Delta t$ representa a probabilidade que um indivíduo suscetível tornar-se infectado no intervalo de tempo Δt. Se considerarmos a população **homogeneamente misturada,** ou seja, em média todos os indivíduos são assumidos intrinsecamente similares do ponto de vista epidemiológico, independente da idade, material genético, hábitos sociais, localização geográfica, etc., a força de infecção é assumida como sendo linearmente proporcional ao número total de indivíduos infecciosos (Bailey [5], Dietz [11]). Ao designarmos por β a taxa de contato, a qual combina um série de fatores epidemiológicos, sociais e de meio ambiente, temos que

$$\lambda(t) = \beta Y(t),$$

onde $Y(t)$ representa o número de indivíduos infecciosos no tempo t.

A força de infecção no equilíbrio pode ser estimada a partir de dados sorológicos ou notificações de casos. Em países desenvolvidos, onde existem registros da incidência de doenças infecciosas por grandes períodos (Fine e Clarkson [15], [16], London e Yorke [31]), as notificações de casos são usadas freqüentemente como referências para testar modelos matemáticos de doenças infecciosas de transmissão direta (Anderson e May [3], Schenzle [36]). Contudo, no caso de países em desenvolvimento, onde as políticas de saúde geralmente não se encontram bem estruturadas, informações mais precisas podem ser encontradas em levantamentos sorológicos, os quais têm sido utilizados na validação de modelos matemáticos (Azevedo et al. [4]).

Observe que a força de infecção pode ser alterada por programas de imunização ou quimioterápicos, uma vez que o nível de infecciosidade é alterado. Contudo com β tal não acontece, uma vez que as intervenções anteriormente descritas não tem influência no padrão de comportamento da população. Ou seja, β é uma constante que caracteriza a infecção, de modo que a determinação de λ tem relevância quando a partir dela podemos determinar β.

Um outro parâmetro de interesse em modelos epidemiológicos é o **Número de Reprodutibilidade Basal** R_0. Ele representa a capacidade intrínseca que um microorganismo tem de invadir e se estabelecer em uma comunidade. Para o caso de microparasitas, R_0 pode ser definido como o número total de infecções secundárias que um único caso primário é capaz de produzir em uma população hospedeira totalmente suscetível durante seu período infeccioso.

Quando um microparasita dissemina-se em uma população hospedeira, a fração de suscetíveis decresce. Eventualmente, um equilíbrio pode ser atingido quando a taxa pela qual indivíduos suscetíveis são infectados for balanceada pela taxa pela qual novos indivíduos suscetíveis aparecem. No equilíbrio, cada infecção irá produzir, em média, exatamente uma infecção secundária e neste caso, o número efetivo de infecções secundárias geradas pelo indivíduo infeccioso, ou **Número de Reprodutibilidade Efetivo,** R, será igual a 1.

No caso da população ser homogeneamente misturada, o número total de infecções secundárias produzidas por um único indivíduo infectado numa população inteiramente suscetível será linearmente proporcional a probabilidade de contacto dele com um indivíduo suscetível (Lei de Ação das Massas), ou seja, o Número de Reprodutibilidade Efetivo, R, será igual ao produto do Número de Reprodutibilidade Basal, R_0, pela fração de suscetíveis, x, a saber,

$$R = R_0 x.$$

Considerando a população no estado estacionário, a condição de equilíbrio $R = 1$ conduz a seguinte relação entre R_0 e x^*, a fração de suscetíveis no equilíbrio,

$$1 = R_0 x^*. \tag{0.1}$$

Esta equação fornece uma maneira de calcularmos R_0, uma vez que x^* pode ser efetivamente encontrado, por exemplo, a partir de estudos sorológicos. Além disto, temos explicitado um mecanismo de controle epidemiológico pois, para que R seja mantido menor que 1, basta que controlemos a fração de suscetíveis abaixo de um certo patamar. Note ainda que, observando as duas equações anteriores, se $R_0 \leq 1$ a doença se extingue, caso contrário, ou seja, se $R_0 > 1$, ela é capaz de invadir e se instalar na população hospedeira.

Desafortunadamente, a equação (0.1) depende fortemente da suposição da homogeneidade da população. Quando algum tipo de heterogeneidade na transmissão da doença for levado em conta, mesmo que percamos a simplicidade da equação (0.1), ainda assim permanece o cerne da questão, ou seja, R_0 como um parâmetro epidemiológico que traz em si a capacidade de disseminação da doença em uma população hospedeira em questão.

Doenças infantis infecciosas de transmissão direta, como rubéola, sarampo ou catapora, têm visivelmente sua taxa de transmissão idade-dependente (existem evidências empíricas da idade-dependência da força de infecção, Anderson e May [1], Collins [9] e Griffiths [20]). Ao assumirmos a população homogeneamente misturada, tal asserção tem clara influência nas conclusões tiradas a partir do modelo, pois temos como conseqüência que a força de infecção é a mesma para todas as idades. Ao determinarmos o **nível crítico de cobertura** por imunização prévia ν_c, ou seja, a menor cobertura possível de modo a conter um surto epidêmico, temos que este é igual à fração de imunes no equilíbrio na população pré-imunizada (Anderson e May [2]). Um efeito indireto da imunização é elevar a idade média de ocorrência da primeira infecção, assim, se a força de infecção for maior para idade maiores o nível crítico real será maior que o estimado, e se a força de infecção for maior para idades menores, o nível crítico real será menor que o estimado (Anderson e May [2]).

Desta maneira, um modelo mais realista para doenças infecciosas de transmissão direta deve conter algum tipo de heterogeneidade. Essa não-homogeneidade foi introduzida na taxa de transmissão de várias maneiras (Anderson e May [2], Dietz [11], Greenhalgh [18], Hoppenstead [22], Inaba [23], Knolle [25], Yang [39], [40]), e a partir disto vários resultados acerca do Número de Reprodutibilidade Basal R_0 foram deduzidos.

Greenhalgh [18] e Inaba [23] caracterizaram R_0 como o raio espectral de um operador integral, respectivamente, para funções separáveis e um subconjunto especial de $\mathcal{L}^1[0, L]$, onde L representa a expectativa máxima de vida. Em nosso trabalho utilizamos um modelo idade-estruturado e a taxa de contato idade-estruturada como uma função de $C[0, L]$, e caracterizamos R_0 como o raio espectral da derivada de Fréchet de um operador integral, obtendo limites inferior e superior para R_0. Estabelecemos condições suficientes para a unicidade do estado estacionário não-trivial e uma maneira recursiva para obtenção da força de infecção. Também estudamos condições para a estabilidade local da solução trivial.

Capítulo 1

O problema biológico *versus* o modelo matemático

A modelagem matemática para fins epidemiológicos tem dois objetivos. O primeiro deles diz respeito a descrição da disseminação da doença e o segundo, com a análise de mecanismos de controle ou erradicaçao da doença. Desde muito a vacina tem sido usada como um meio de controle e/ou erradicação de doenças, uma vez que a mesma é capaz de conferir ao indivíduo inoculado uma proteção, perene ou não, contra o agente infeccioso em questão.

Quando um modelo matemático é fundamentado em conhecimentos biológicos do agente infeccioso quanto à infectividade (traduzida pela transmissibilidade do vírus de um indivíduo para outro) e no mecanismo de ação de uma vacina, ele pode descrever, com algum realismo, o fenômeno de transmissão e os vários cenários oriundos de diferentes estratégias de vacinação.

Estamos interessados no estudo epidemiológico matemático de **doenças infecciosas de transmissão direta**. Estas são infecções, viróticas ou bacterianas, cuja disseminação acontece diretamente através do meio físico quando ocorre um contato apropriado entre um indivíduo suscetível e um indivíduo infeccioso. Portanto, não estamos considerando doenças, viróticas ou bacterianas, que exijam um agente transmissor (por exemplo, dengue) ou contato físico íntimo (por exemplo, doenças sexualmente transmissíveis).

Tendo em vista os objetivos anteriormente descritos, prosseguiremos fazendo uma descrição biológica do agente infeccioso, da sua interação com o hospedeiro e do processo de disseminação da doença. A seguir, desenvolvemos um modelo matemático que descreve o processo de disseminação levando em conta as várias características da doença. As referências para esta seção são Anderson e May [2] e Yang [41].

Convém ressaltar que um modelo matemático sempre é limitado às hipóteses e simplificações assumidas em seu desenvolvimento, de maneira que modificações e aperfeiçoamentos podem e, mais que isto, devem ser introduzidas ao modelo de modo a torná-lo cada vez mais próximo da realidade.

1.1 O fenômeno biológico

Os agentes etiológicos das doenças infecciosas de transmissão direta, geralmente vírus e bactérias, são classificados como microparasitas. Os **microparasitas** são caracterizados pelo seu pequeno tamanho tendo reprodução direta dentro do hospedeiro, geralmente a altas taxas; tempo pequeno decorrido entre a infecção do indivíduo e sua recuperação; sendo que, usualmente, o hospedeiro após a recuperação adquire imunidade que pode ser temporária (gripe) ou permanente (doenças infecciosas infantis como rubéola, catapora, sarampo, etc) e a duração da infecção é curta em relação à expectativa de vida do hospedeiro.

O encadeamento do processo infeccioso inicia-se quando um indivíduo **suscetível**, ou seja, aquele apto a adquirir a doença uma vez que não entrou em contato com o agente infeccioso, entra em contato suficientemente próximo com um indivíduo infectado apto a transmitir a doença. O agente infeccioso invade o organismo hospedeiro e por um certo período de tempo ele replica-se rapidamente pois não encontra nenhuma resistência. Concomitantemente à invasão do agente infeccioso, o organismo invadido, tendo seu sistema imunológico estimulado pela presenta do agente infeccioso, dá início a uma resposta imunológica com a produção de anticorpos específicos contra o invasor. Após alguns dias, a concentração deste agente infeccioso no indivíduo começa a declinar proporcionalmente ao aumento na concentração de anticorpos produzidos. Decorridos mais alguns dias, praticamente não é possível encontrar o agente infeccioso circulante no indivíduo, que é quando os anticorpos atingem valores máximos. A partir daí, o indivíduo se recupera e adquire imunidade contra a doença, que pode ser perene ou apenas temporária. Esta descrição é a nível individual, no entanto, a relação hospedeiro-parasita também pode ser descrita a nível coletivo ao analisarmos a situação do indivíduo frente a comunidade em relação à concentração do agente infeccioso ao longo do tempo.

Inicialmente, os indivíduos suscetíveis ao se infectarem com o agente infecioso passam por um período denominado **período latente.** Este período corresponde ao tempo que decorre desde o **contato efetivo**, ou seja, aquele contato que efetivamente dá origem a uma nova infecção, até o instante que a multiplicação do agente infeccioso no hospedeiro atinge uma quantidade circulante tal, que o mesmo passe a ser eliminado ao meio-ambiente através de excreções, como por exemplo saliva, excreções do trato respiratório, etc.. O hospedeiro neste período recebe o nome de **exposto** ou latente, ou ainda, infectado.

O período subseqüente, que decorre desde quando o agente infeccioso atinge um nível circulante alto tal que o mesmo começa a ser eliminado do organismo hospedeiro, até o quase completo declínio da quantidade circulante do mesmo, declínio este devido a resposta imunológica do hospedeiro, é denominado **período infeccioso** ou de recuperação, e o hospedeiro recebe o nome de **infeccioso** ou infectante É neste estágio que o indivíduo encontra-se apto a transmitir a doença.

Finalmente, no período onde a quantidade do agente infeccioso é tal que o indivíduo não mais retorna ao estado infeccioso e adquire imunidade à doença, seja ela perene ou temporária, o indivíduo recebe a denominação de **recuperado** ou removido, ou ainda, imune.

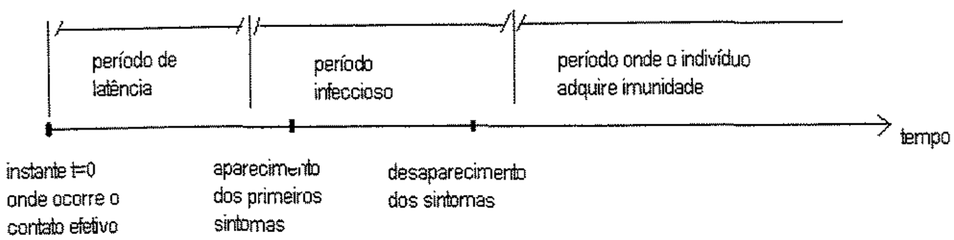

gráfico do desenvolvimento da doença em

um indivíduo infectado no instante $t = 0$

Esta descrição dá-se em nível laboratorial, uma vez que é necessária uma dosagem da concentração do agente infeccioso ou de anticorpos correspondentes ao mesmo. No entanto, uma determinação grosseira do período de recuperação pode ser feita observando-se o aparecimento, e depois o desaparecimento, dos sintomas correspondentes à doença, uma vez que estes são uma resposta defensiva do organismo hospedeiro à concentração do agente infeccioso. Assim, o período infeccioso vai de alguns dias anteriores ao aparecimento dos sintomas até alguns dias após o desaparecimento dos sintomas.

Um auxílio ao combate às doenças é conseguido com a utilização de vacinas. A indução de imunidade pela inoculação do agente infeccioso atenuado, seja por envelhecimento ou pela passagem por hospedeiros artificiais, tem a finalidade de proteger o indivíduo contra a forma mais virulenta do mesmo. A proteção conferida pela vacina vem do fato que, mesmo o agente infeccioso não sendo capaz de produzir a doença, ainda retém a capacidade de estimular o sistema imunológico do organismo hospedeiro na produção de anticorpos específicos frente a presença do correspondente **antígeno**, ou seja, aquela substância do agente invasor capaz de, em condições normais e apropriadas, induzir a produção de anticorpos no hospedeiro. Em geral, a imunidade produzida pela infecção é perene, no entanto, as vacinas podem falhar em dois níveis. A **falha primária** consiste em a vacina não induzir a imunidade no indivíduo vacinado, o que pode ocorrer ou pela deficiência do sistema imunitário do indivíduo ou por falha na produção da vacina. A **falha secundária** ocorre quando o nível de imunidade vacinal é baixo, gerando uma perda de imunidade, que algumas vezes pode ser recuperada via reinfecções.

Uma vez que, como foi dito, o contato entre indivíduos é necessário à transmissão da doença, a dinâmica populacional da comunidade também deve ser levada em consideração. Um aspecto é a questão da mortalidade. Além da mortalidade natural, a mortalidade induzida pela doença pode ou não ser considerada. Em paralelo ao aspecto da mortalidade devemos considerar também os nascimentos e como ambas as taxas, a de mortalidade e a de nascimento, se comportam uma em relação a outra. Por exemplo, se a população cresce, decresce ou se mantém constante, cada uma destas suposições implicará numa dada relação entre as taxas de mortalidade e nascimento de tal modo que o fenômeno se verifique. Os fenômenos migratórios também devem ser levados em conta. Uma suposição que pode ser feita é que a população é **fechada**, ou seja, os fluxos de migração e emigração são tais que não resultem em uma variação populacional, nem influenciem na dinâmica da doença, como por exemplo, produzindo a entrada de suscetíveis.

Portanto, como podemos ver pelo que foi anteriormente explicitado, na descrição quantitativa das infecções de transmissão direta devemos levar em conta tanto fatores biológicos relacionados ao agente infeccioso, como por exemplo, presença de anticorpos maternos nos recém-nascidos, transmissão vertical, mortalidade induzida pela doença, não-indução de imunidade pela vacina, etc., quanto fatores alheios ao agente etiológico, como diversidade social e espacial, condições climáticas, heterogeneidade genética dos indivíduos da população, etc..

Como desejamos descrever a disseminação da doença e também avaliar programas de vacinação, na descrição da sua dinâmica consideraremos os seguintes aspectos: tempo de geração de uma infecção, capacidade de indução da imunidade por meio de vacina e capacidade de transmissão da infecção.

O **tempo de geração de infecção** é a soma dos períodos médios latente e infeccioso. Baseando-se neste tempo de geração, os indivíduos de uma comunidade são discriminados e sub-divididos em quatro compartimentos ou classes não-interceptantes: suscetíveis, expostos, infecciosos e recuperados. Um modelo que apresente as quatro classes é comumentemente referenciado como um modelo **SEIR** (**S**uscetível, **E**xposto, **I**nfeccioso e **R**ecuperado). Outros modelos, contendo outras combinações de compartimentos, podem ser considerados, como por exemplo, um modelo SIS, onde somente as classes de suscetíveis e infecciosos é considerada, ou um modelo SIR, quando não consideramos a classe do expostos, etc..

Fazendo diferentes suposições no modelo temos associados diferentes fluxos nos compartimentos. Se consideramos, por exemplo, a imunidade materna com a sua respectiva perda após algum tempo decorrido do nascimento, temos um fluxo de recém-nascidos entrando numa classe especial dos removidos, aqueles removidos por imunidade materna temporária que, depois de algum tempo, se deslocam para a classe dos suscetíveis se não ocorrer a vacinação. Caso ocorra a vacinação, ingressam então na classe dos recuperados. Por outro lado, se são infectados via contato efetivo com algum indivíduo infeccioso, ingressam na classe dos expostos, posteriormente na classe dos infecciosos e, finalmente, na classe dos recuperados. Outras diferentes hipóteses geram fluxos diversos.

A **capacidade de indução da imunidade por meio da vacina** está relacionada tanto com a capacidade de resposta do sistema imunológico do indivíduo quanto com a eficácia da vacina. As hipóteses da ocorrência de falhas, primária ou secundária, podem ser incluídas ou não no modelo, e cada uma delas dará origem a um determinado fluxo entre compartimentos. Se, por exemplo, consideramos a não ocorrência de falhas vacinais, os indivíduos suscetíveis, ao serem vacinados, produzem um fluxo em direção ao compartimento dos recuperados onde permanecem até a saída por mortalidade.

Finalmente, **a capacidade de transmissao da infecção** está ligada, primeiro ao comportamento de relacionamento entre os indivíduos da comunidade, uma vez que, para que uma nova infecção ocorra, é necessário que indívíduos infecciosos e suscetíveis tenham encontros relativamente próximos que propiciem condições para a transmissão do agente infeccioso. Segundo, a transmissibilidade (ou infectividade) do agente infeccioso, ou seja, a capacidade do agente infeccioso circulante infectar um indivíduo suscetível. Da conjunção dos dois fatores, padrão de relacionamento e transmissibilidade do agente infeccioso, surge o conceito de **taxa de contato,** β, parâmetro epidemiológico matemático que descreve a transmissão da uma dada doença entre os indivíduos de uma certa comunidade, uma vez que engloba ambos os aspectos de transmissão.

Uma suposição possível é que a taxa de contato entre os indivíduos seja igual para todos os indivíduos e, neste caso, dizemos que a população é homogeneamente misturada. Com esta suposição estamos assumindo que, epidemiologicamente, os indivíduos não podem ser diferenciados quanto a idade, hábitos sociais, material genético, etc.. E, em particular, a transmissão da doença dependerá unicamente da transmissibilidade do agente infeccioso e da probabilidade de encontro do indivíduo suscetível com o infeccioso. No entanto, existem doenças que apresentam um padrão comprovadamente heterogêneo na sua transmissão, como por exemplo, as doenças infantis infecciosas de transmissão direta, onde um padrão de contato levando em conta este tipo de heterogeneidade deve necessariamente ser considerado se queremos um modelo que represente de forma realísta a disseminação da doença.

Uma vez que estamos levando em consideração o padrão de comportamento dos indivíduos, outro aspecto a ser observado na transmissão da doença diz respeito aos encontros entre indivíduos da comunidade. Estaremos considerando o **Princípio de Ação das Massas**, conceito emprestado da Lei da Cinética Química, que estabelece que a velocidade da reação química é proporcional à concentração dos reagentes. Tal conceito está baseado no encontro aleatório entre os reagentes. O mesmo será assumido no caso epidemiológico, ou seja, a "velocidade" de propagação da epidemia será considerada proporcional ao produto dos indivíduos suscetíveis e infecciosos.

A maneira como a população se comporta juntamente com a transmissibilidade do agente infeccioso vão determinar a forma como a doença se espalha pela comunidade. A força de infecção é um parâmetro epidemiológico que mede a dimensão da propagação da doença. Definindo a **incidência** como o número de casos novos por unidade de tempo temos que a **força de infecção** é definida como a incidência *per capita* de uma doença, comumente designada por λ.

Com base na discussão acima, procedemos na próxima seção o desenvolvimento do modelo que descreve a disseminação de uma doença infecciosa de transmissão direta.

1.2 O modelo

Com base nas considerações da seção anterior, passamos agora ao desenvolvimento de um modelo matemático que descreve o fenômeno biológico da disseminação de uma doença infecciosa de transmissão direta.

Para descrever o espalhamento de uma doença infecciosa de transmissão direta em uma população idade-estruturada, consideramos um sistema de equações integro-diferenciais (Dietz [11]). Estamos supondo a população fechada e dividida em compartimentos designados por $X(a,t), H(a,t), Y(a,t)$ e $Z(a,t)$, que representam, respectivamente, a densidade com respeito a idade a no tempo t de indivíduos suscetíveis, expostos, infecciosos e recuperados. Por exemplo, $X(a,t)\,\Delta a$ é o número de indivíduos suscetíveis entre as idades a e $a + \Delta a$ e a integral

$$\int_{a_1}^{a_2} X(a,t)\,da$$

representa o número de indivíduos infecciosos entre as idades a_1 e a_2 no instante t.

Estamos desconsiderando a imunidade adquirida verticalmente (ou seja, os recém-nascidos são considerados suscetíveis), a perda de imunidade, seja ela adquirida por recuperação ou vacinação, e a mortalidade induzida pela doença.

As considerações anteriores resultam no seguinte sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial X}{\partial t}(a,t) &= -(\lambda(a,t) + \nu(a) + \mu) X(a,t) \\ \frac{\partial H}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial H}{\partial t}(a,t) &= \lambda(a,t) X(a,t) - (\mu+\sigma) H(a,t) \\ \frac{\partial Y}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial Y}{\partial t}(a,t) &= \sigma H(a,t) - (\mu+\gamma) Y(a,t) \\ \frac{\partial Z}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial Z}{\partial t}(a,t) &= \nu(a) X(a,t) + \gamma Y(a,t) - \mu Z(a,t) \end{cases} \tag{1.1}$$

com a força de infecção idade-específica na idade a no instante t definida por

$$\lambda(a,t) = \int_0^L \beta(a,a') Y(a',t)\, da', \tag{1.2}$$

onde $\beta(a,a')$ é a taxa de contato idade-estruturada entre indivíduos suscetíveis de idade a com indivíduos infecciosos de idade a', $\nu(a)$ é a taxa de vacinação, μ é a taxa de mortalidade, σ^{-1} é o período médio de latência, γ^{-1} é o período médio de recuperação, X_b é a taxa de nascimento total e L é a idade máxima acima da qual nenhum indivíduo da população sobrevive.

As condições iniciais do sistema (1.1) são dadas por valores previamente conhecidos $X(a,0)$, $H(a,0)$, $Y(a,0)$ e $Z(a,0)$, e as condições de fronteira do sistema (1.1) são dadas por

$$\begin{cases} X(0,t) &= X_b \\ H(0,t) = Y(0,t) = Z(0,t) &= 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

as quais derivam das asserções do modelo.

Definindo a densidade de indivíduos na idade a no instante t por $N(a,t) = X(a,t) + H(a,t) + Y(a,t) + Z(a,t)$ temos que, no equilíbrio (ou seja, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$), $N(a)$ representa a densidade de indivíduos com respeito a idade a. Segue que $N(a)\Delta a$ é o número de indivíduos no intervalo de idade $[a, a+\Delta a]$ e $N(a+\Delta a)\Delta a$ o número de indivíduos no intervalo $[a+\Delta a, a+2\Delta a]$. Então

$$N(a+\Delta a)\Delta a = N(a)\Delta a(1-\mu)\Delta a + \mathcal{O}\left(\Delta a^2\right),$$

e, portanto,

$$\frac{dN}{da}(a) = -\mu(a)\, N(a).$$

Sendo $N(0) = X_b$, obtemos

$$N(a) = X_b e^{-\int_0^a \mu(s)ds}.$$

Assim, o número de indivíduos no intervalo $[a, a + \Delta a]$ no tempo t é dado por

$$X_b e^{-\int_0^a \mu(s)ds} \Delta a,$$

e o número de nascimentos para estes indivíduos no tempo $[t, t + \Delta t]$ é

$$X_b^2 e^{-\int_0^a \mu(s)ds} \Delta a \Delta t.$$

O número total de nascimentos é dado por

$$\int_0^L X_b^2 e^{-\int_0^a \mu(s)ds} da \Delta t.$$

Similarmente o número total de mortes é dado por

$$\int_0^L \mu(a)\, X_b e^{-\int_0^a \mu(s)ds} da \Delta t.$$

Assumindo que o tamanho total da comunidade é constante temos que os nascimentos e mortes devem compensar-se mutuamente, assim segue que

$$\int_0^L X_b^2 e^{-\int_0^a \mu(s)ds} da \Delta t = \int_0^L \mu(a)\, X_b e^{-\int_0^a \mu(s)ds} da \Delta t.$$

Como nenhum indivíduo sobrevive acima da idade L, e sendo $e^{-\int_0^a \mu(s)ds}$ a fração de indivíduos que sobrevive à idade a, tal função é conhecida como **função sobrevivência,** podemos assumir que $e^{-\int_0^L \mu(s)ds} = 0$, donde

$$X_b \int_0^L e^{-\int_0^a \mu(s)ds} da = 1.$$

Tendo descrito o modelo matemático com base nas considerações biológicas, no próximo capítulo procedemos a caracterização do Número de Reprodutibilidade Basal.

Capítulo 2

Caracterizando $\mathbf{R}_0$ como o raio espectral

Neste capítulo damos uma caracterização do Número de Reprodutibilidade R_ν como o raio espectral da derivada de Fréchet de um operador integral. Greenhalgh [18] considerou uma taxa de contato idade estruturada $\beta(a,a')$ como sendo uma função separável

$$\beta(a,a') = \sum_{i=1}^{n} p_i(a)\, q_i(a')$$

e utilizou resultados sobre o raio espectral de operadores lineares sobre espaços de Banach de dimensão finita. Em nosso caso, consideramos $\beta(a,a') \in C[0,L]$ e usamos resultados de operadores positivos em cones obtidos por Deimling [10] e pontos fixos de Krasnosel'skii [27].

Inaba [23] utilizando um modelo SIR discutiu acerca da unicidade da solução não-trivial. Usando um modelo SEIR analisamos a questão da unicidade da solução não-trivial e quando esta pode ser o limite de uma seqüência recursiva. Discutimos também acerca da estabilidade da solução trivial.

2.1 A caracterização de $\mathbf{R}_0$ como raio espectral

No estado estacionário, o sistema (1.1), a força de infecção (1.2) e as condições iniciais (1.3) passam a ter a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dX}{da}(a) &= -\left(\lambda\left(a\right)+\nu\left(a\right)+\mu\right)X\left(a\right) \\ \\ \frac{dH}{da}\left(a\right) &= \lambda\left(a\right)X\left(a\right)-\left(\mu+\sigma\right)H\left(a\right) \\ \\ \frac{dY}{da}\left(a\right) &= \sigma H\left(a\right)-\left(\mu+\gamma\right)Y\left(a\right) \\ \\ \frac{dZ}{da}\left(a\right) &= \nu\left(a\right)X\left(a\right)+\gamma Y\left(a\right)-\mu Z\left(a\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\lambda\left(a\right)=\int_0^L \beta\left(a,a'\right)Y\left(a'\right)da' \tag{2.2}$$

e

$$\begin{cases} X\left(0\right) &= X_b \\ H\left(0\right)=Y\left(0\right)=Z\left(0\right) &= 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $X(a)$, $H(a)$, $Y(a)$, $Z(a)$ e $\lambda\left(a\right)$ são variáveis independentes do tempo.

Resolvendo as equações do sistema (2.1) sob condições (2.3), obtemos para a força de infecção a equação integral não-linear

$$\lambda\left(a\right)=\int_0^L \mathbf{B}\left(a,\zeta\right)e^{-\int_0^\zeta \lambda(s)ds}\lambda\left(\zeta\right)d\zeta, \tag{2.4}$$

onde o núcleo é dado por

$$\mathbf{B}\left(a,\zeta\right)=\sigma X_b e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds}\int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)}e^{\gamma s}\left[\int_s^L \beta\left(a,a'\right)e^{-(\mu+\gamma)a'}da'\right]ds. \tag{2.5}$$

A equação integral de $\lambda\left(a\right)$ é uma equação integral do tipo Hammerstein.

Uma vez que λ representa a força de infecção, a existência de uma solução não nula para equação integral (2.4) significa, biologicamente, que a doença é capaz de invadir e se estabelecer na população. Nosso objetivo é estabelecer condições para que a equação integral (2.4) possua solução distinta da trivial. Para tanto, vamos introduzir algumas definições e resultados clássicos em Análise Funcional e Análise Funcional Não-linear, necessários ao entendimento do texto.

Afora menção em contrário, X é um espaço de Banach e $A : X \to X$ é um operador.

1) Um subconjunto K de X é um **cone** se é um subconjunto fechado, convexo, $K \cap (-K) = \{0\}$ e para todo $k \in \mathbf{R}$, $k > 0$, $kK \subset K$. Um cone é **sólido** se tem interior não vazio, isto é, $int\,(K) \neq \emptyset$. Em particular, se um cone é sólido ele é **gerador**, isto é, $X = K - K$. K estabelece sobre X uma relação de ordem parcial definida por: dados $x, y \in X$, $x \leq y$ se $y - x \in K$ e $x < y$ se $y - x \in K$ e $x \neq y$. Particularmente, $0 \leq x$ se $x \in K$; e $0 < x$ se $x \in K$ e $x \neq 0$. Um cone é chamado **normal** se existe um $\delta > 0$ tal que $\|x_1 + x_2\| \geq \delta$ para $x_1, x_2 \in K$ e $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$. Por exemplo, o cone das funções reais definidas sobre um intervalo real fechado, contínuas e não-negativas com a norma do supremo é um cone normal. Um operador $A : X \longrightarrow X$ é **positivo** se $A(K) \subset K$, e **fortemente positivo** se dado $0 \neq x \in K$ então $A\,(x) \in int\,(K)$ (Deimling [10]).

2) Um operador $A : X \longrightarrow X$ é **(fortemente) Fréchet diferenciável no ponto $u_0 \in X$ na direção do cone** K se para todo $h \in K$, $h \neq 0$, existe um operador linear $A'\,(u_0) : X \to X$ e um operador $\varpi\,(u_0, .) : K \longrightarrow X$ tal que

$$A\,(u_0 + h) = A\,(u_0) + A'\,(u_0)\,h + \varpi\,(u_0, h)\,,$$

onde $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \frac{\|\varpi(u_0,h)\|}{\|h\|} = 0$. $A'\,(u_0)$ é chamado **derivada (forte) de Fréchet com respeito ao cone K no ponto u_0**.

3) Uma função $y : t \in \mathbf{R} \to y\,(t) \in X$ é dita **diferenciável no infinito** se a razão $\left(\frac{1}{t}\right) y\,(t)$ converge para algum elemento $y'\,(\infty) \in X$ quando $t \to \infty$. É comum falar em **diferenciabilidade forte** ou **fraca no infinito** dependendo de $\left(\frac{1}{t}\right) y\,(t)$ convergir forte ou fracamente para $y'\,(\infty)$. O operador A é dito **(fortemente) diferenciável no infinito na direção do cone** K se para todas as direções $h \in K$ e $h \neq 0$, temos que a derivada $y'\,(\infty)$ de $A\,(th)$ é representada na forma $y'\,(\infty) = A'\,(\infty)\,h$, onde $A'\,(\infty)$ é um operador linear contínuo. $A'\,(\infty)$ é chamada **derivada no infinito com relação ao cone** K. O operador $A'\,(\infty)$ é chamado **derivada assintótica forte com relação ao cone** K e o operador A é chamado **fortemente assintoticamente**

linear com relação ao cone K se

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|\geq R, x\in K} \frac{\|Ax - A'(\infty)x\|}{\|x\|} = 0$$

(Krasnosel'skii [27]).

4) Se X não é um espaço de Banach complexo podemos considerar sua complexificação $X_{\mathbf{C}}$, o espaço de Banach complexo de todos os pares (x,y), $x,y \in X$, com

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

e

$$(\xi_1 + i\xi_2)(x,y) = (\xi_1 x - \xi_2 y, \xi_1 y + \xi_2 x),$$

e cuja norma é dada por $\|(x,y)\| = \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} \|x\cos\theta + y\sin\theta\|$. Temos então que X e o subespaço real $\widehat{X} = \{(x,0); x \in X\}$ de $X_{\mathbf{C}}$ são isométricos. Se $A : X \to X$ é um operador linear, sua complexificação $A_{\mathbf{C}} : X_{\mathbf{C}} \to X_{\mathbf{C}}$ é definida por

$$A_{\mathbf{C}}(x,y) = (Ax, Ay),$$

e $\|A_{\mathbf{C}}\| = \|A\|$ (Deimling [10]).

5) Seja $A : X \longrightarrow X$ um operador linear em um espaço normado complexo X, e ξ um número complexo, ou seja, $\xi \in \mathbf{C}$. Podemos então associar os operadores

$$A_\xi = A - \xi I$$

e

$$\Re(\xi) = A_\xi^{-1},$$

sempre que o operador inverso existir. A aplicação $\Re$ que a cada $\xi \in \mathbf{C}$ associa $\Re(\xi)$, quando isto é possível, é chamada de **operador resolvente** de A. $\xi \in \mathbf{C}$ é chamado um **valor regular** de A se existe $\Re(\xi)$ e este é um operador linear limitado com $\overline{Dom(\Re(\xi))} = X$. O conjunto de todos os valores regulares de A é chamado de conjunto resolvente de A, ou simplesmente, o **resolvente de** A, e é denotado $\rho(A)$. O **espectro de** A é definido por $\sigma(A) = \mathbf{C} - \rho(A)$. O conjunto de todos $\xi \in \mathbf{C}$ tal que $R(\xi)$ não existe é chamado de **espectro puntual** de A e denotado por $\sigma_p(A)$. Seus elementos são ditos **autovalores** e assim, $\xi \in \sigma_p(A)$ se e somente se existe $x \in X$, $x \neq 0$, tal que $Ax = \xi x$, onde x é dito um **autovetor de** A **associado ao autovalor** ξ, ou simplesmente, um autovetor de A. Segue da definição do espectro de A que $\xi \in \sigma(A)$ se uma das condições não se verifica, ou seja, se A_ξ^{-1} não existe, ou se existe, não é limitado ou $\overline{Dom(R(\xi))} \neq X$.

6) Sejam X um espaço de Banach complexo e A um operador limitado. Se $\Re(\xi)$ existe, ele está definido em todo X e é limitado. Resultados clássicos mostram que $\rho(A)$ é aberto e o domínio de analiticidade natural de $\Re$ (um **domínio** no plano complexo $\mathbf{C}$ é um subconjunto aberto tal que todo par de pontos por ser ligado por número finito de segmentos de retas inteiramente contidos nele) e $\sigma(A)$ é um conjunto fechado, limitado e não vazio. Sendo A um operador linear limitado e $\sigma(A)$ limitado, podemos definir seu **raio espectral** $r(A)$ por

$$r(A) = \sup_{\xi \in \sigma(A)} |\xi|.$$

É possível provar que se $A_{\mathbf{C}}$ é a complexificação de A então $r(A) = r(A_{\mathbf{C}})$. Outro resultado relativo ao raio espectral é que

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}},$$

que é chamada fórmula de Gelfand (Kreyszig [29]).

7) Um operador $T : X \to X$ é **compacto** se leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos. Se A é um operador linear compacto então suas propriedades são muito próximas das de operadores sobre espaços de dimensão finita. Por exemplo, se A é um operador linear compacto seu conjunto de autovalores é enumerável (talvez finito ou mesmo vazio) e $\xi = 0$ é o único ponto de acumulação possível deste conjunto. Além disto, a dimensão de qualquer autoespaço de A é finita e todo valor espectral $\xi \neq 0$ é um autovalor. Se $\xi \neq 0$ é um autovalor

então existe um número natural $p = p(\xi)$ tal que

$$X = N\left(A_\xi^p\right) \oplus A_\xi^p(X),$$

onde

$$N\left(A_\xi^0\right) \subset N\left(A_\xi\right) \subset N\left(A_\xi^2\right) \subset ... \subset N\left(A_\xi^p\right) = N\left(A_\xi^{p+1}\right) = ...$$

e

$$A_\xi^0(X) \supset A_\xi(X) \supset A_\xi^2(X) \supset ... \supset A_\xi^p(X) = A_\xi^{p+1}(X) = ...$$

$\dim\left(N\left(A_\xi^p\right)\right)$ é a **multiplicidade algébrica** de ξ e $\dim(N(A_\xi))$ é a **multiplicidade geométrica** de ξ (no caso de $X = \mathbf{R}^n$, $\dim\left(N\left(A_\xi^p\right)\right)$ e $\dim(N(A_\xi))$ são, respectivamente, as multiplicidades de ξ como zero do polinômio característico e do polinômio minimal de A). Particularmente, a ordem do autovalor $\xi \neq 0$ como um pólo do operador resolvente $\Re(.)$ é igual a sua multiplicidade algébrica (Deimling [10]).

Consideremos o espaço de Banach $C[0,L]$ de todas as funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,L]$ com a norma usual $\|f\| = \sup\limits_{a\in[0,L]} |f(a)|$, com cone sólido e normal $C[0,L]^+ = \{f \in C[0,L] : f(a) \geq 0\}$. Voltando às equações (2.4) e (2.5), estas podem ser reescritas como

$$\lambda(a) = \int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta))\, \lambda(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.6}$$

onde

$$M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta)) = e^{-\int_0^\zeta \lambda(s)ds}\, e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} \tag{2.7}$$

e

$$B(a,\zeta) = \sigma X_b \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int_s^L \beta(a,a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da'\right] ds. \tag{2.8}$$

Algumas considerações são feitas sobre $\beta(a,a')$ e $\nu(a)$. Assumamos que $\beta(a,a')$ e $\nu(a)$ são tais que

a) $\beta(a,a')$ é contínua e estritamente positiva, exceto possivelmente em $a = a' = 0$ onde podemos ter $\beta(a,a')=0$.

b) $\nu(a)$ é não-negativa, contínua ou contínua por partes com no máximo um número finito de descontinuidades, e limitada.

Como conseqüência da asserção (a) sobre $\beta(a,a')$ temos que $B(a,\zeta)$ é contínua em a e ζ, limitada e estritamente positiva. De fato, supondo que $B(a^*,\zeta^*)=0$ segue que

$$\sigma X_b \int_{\zeta^*}^{L} e^{-\sigma(s-\zeta^*)} e^{\gamma s} \left[\int_{s}^{L} \beta\left(a^*,a'\right) e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds = 0.$$

Necessariamente temos

$$\beta\left(a^*,a'\right)=0$$

para todo $a\in[\zeta^*,L]$, o que não é possível de acordo com a condição (a).

$M(\zeta,\lambda(\zeta),\nu(\zeta))$ é estritamente positiva, contínua em ζ para cada λ e ν, e estritamente monótona decrescente em λ para cada ζ e ν. Obviamente $|M(\zeta,\lambda(\zeta),\nu(\zeta))|<1$ para todo $\zeta\in[0,L]$ e

$$|M(\zeta,\lambda_1(\zeta),\nu(\zeta))-M(\zeta,\lambda_2(\zeta),\nu(\zeta))|\leq\left|1-e^{-\int_0^{\zeta}(\lambda_1(s)-\lambda_2(s))ds}\right|,$$

de modo que $|M(\zeta,\lambda_1(\zeta),\nu(\zeta))-M(\zeta,\lambda_2(\zeta),\nu(\zeta))|\to0$ quando $\|\lambda_1-\lambda_2\|\to0$. Além disto, temos que

$$\int_0^L e^{-\int_0^{\zeta}u(s)ds} e^{-\int_0^{\zeta}\nu(s)ds} u(\zeta)\,d\zeta \leq \int_0^L e^{-\int_0^{\zeta}u(s)ds} u(\zeta)\,d\zeta = 1-e^{-\int_0^{L}u(s)ds}$$

e, portanto,

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\int_0^L M(\zeta,x(\zeta),\nu(\zeta))\,x(\zeta)\,d\zeta<\infty.$$

Seja T o operador sobre $C[0,L]$ definido por

$$Tu(a) = \int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))\, u(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.9}$$

onde $M(\zeta, u, \nu)$ e $B(a,\zeta)$ são funções reais satisfazendo as condições abaixo anunciadas:

c) $B(a,\zeta)$ está definida em $[0,L] \times [0,L]$, é estritamente positiva e contínua nas variáveis a e ζ.

d) $M(\zeta, u, \nu)$ está definida sobre $[0,L] \times [0,\infty) \times [0,\infty)$, é estritamente positiva, contínua em ζ para cada u e v, estritamente monótona decrescente em u para cada ζ e ν, e existe $k_1 \geq 0$ tal que

$$|M(\zeta, u_1(\zeta), \nu(\zeta)) - M(\zeta, u_2(\zeta), \nu(\zeta))| \leq k_1 \|u_1 - u_2\| + R(u_1, u_2),$$

com $\lim\limits_{\|u_1 - u_2\| \to 0} R(u_1, u_2) = 0$.

e) Existe um número real $m > 0$ tal que $|M(\zeta, u, \nu)| \leq m$ para todo ζ, u e ν.

f) $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} \int_0^L M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))\, u(\zeta)\, d\zeta < \infty$.

Uma solução não-trivial da equação (2.6) é um ponto fixo do operador dado pela equação (2.9) onde $M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta))$ e $B(a,\zeta)$ são dadas, respectivamente, pelas equações (2.7) e (2.8). Estamos interessados, portanto, em saber quando 1 é um autovalor do operador (2.9). Inicialmente estabelecemos propriedades para o operador (2.9).

Definição 1: *Um operador A é **completamente contínuo** se for compacto e contínuo.*

Os Teoremas 1, 2 e 3 que seguem abaixo enunciados são utilizados na demonstrações de diversos lemas e teoremas relacionados à equação (2.9). As provas podem ser encontradas, respectivamente, em Krasnosel'skii [28], página 46 e Kreyszig [29], páginas 407 e 454.

Teorema 1: *Sejam os espaços de Banach E_1 e E_2, os operadores $\overline{f} : E_1 \to E_2$ contínuo e limitado e $\overline{B} : E_2 \to E_1$ linear e completamente contínuo. Então o operador $A = \overline{B}\,\overline{f} : E_1 \to E_1$ é completamente contínuo.*

Teorema 2 (Critério de Compacidade): *Seja $S : Y \to Z$ um operador linear onde Y e Z são espaços normados. Então S é compacto se e só se mapea toda seqüência limitada $(y_n)_n$ em Y em uma seqüência em Z que possua uma subseqüência convergente.*

Teorema 3 (**Teorema de Ascoli**): *Toda seqüência limitada e eqüicontínua* $(x_n)_n$ *em* $C[0,L]$ *tem uma subseqüência que converge na norma em* $C[0,L]$ *(uma seqüência* $(y_n)_n$ *em* $C[0,L]$ *é chamada* ***eqüicontínua*** *se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que para todo* y_n *e todos* $a, a' \in [0,L]$ *satisfazendo* $|a - a'| < \delta$ *temos* $|y_n(a) - y_n(a')| < \varepsilon$*).*

Lema 1: *O operador* T *definido pela equação (2.9) é positivo e completamente contínuo.*

Dem.: i) Se $u \in C[0,L]^+$ então $Tu \in C[0,L]^+$. De fato, sejam $a_1, a_2 \in [0,L]$, então

$$\begin{aligned} |Tu(a_1) - Tu(a_2)| &\leq \left\{ \int_0^L |M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))| \, |u(\zeta)| \times \right. \\ &\qquad \left. |B(a_1,\zeta) - B(a_2,\zeta)| \, d\zeta \right\} \\ &\leq m \|u\| \int_0^L |B(a_1,\zeta) - B(a_2,\zeta)| \, d\zeta. \end{aligned}$$

Sendo B contínuo no conjunto compacto $[0,L] \times [0,L]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se

$$\|(a_1,\zeta) - (a_1,\zeta)\| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2} \leq \delta$$

então

$$|B(a_1,\zeta) - B(a_2,\zeta)| \leq \frac{\varepsilon}{m \|u\| L}.$$

Portanto, se $|a_1 - a_2| \leq \delta$ então $|Tu(a_1) - Tu(a_2)| \leq \varepsilon$.

ii) A positividade de T é facilmente verificada.

iii) T é completamente contínuo. Sejam os operadores $\overline{B}$ e $\overline{f}$ definidos pelas equações

$$\begin{aligned} \overline{B}: \ C[0,L] &\to C[0,L] \\ \overline{B}u(a) &= \int_0^L B(a,\zeta) \, u(\zeta) \, d\zeta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{f}: \ C[0,L] &\to C[0,L] \\ \overline{f}u(\zeta) &= M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta)) \, u(\zeta). \end{aligned}$$

Segue do Teorema 1 que, sendo $B = \overline{B}\,\overline{f}$, para que o mesmo seja completamente contínuo, é suficiente que $\overline{B}$ seja completamente contínuo e $\overline{f}$ seja contínuo e limitado.

$\overline{B}$ é contínuo. Sejam $u, u_0 \in C[0,L]$ e $a \in [0,L]$ então

$$\left|\overline{B}u(a) - \overline{B}u_0(a)\right| = \int_0^L |B(a,\zeta)|\,|u(\zeta) - u_0(\zeta)|\,d\zeta.$$

Como B é contínuo no conjunto compacto $[0,L] \times [0,L]$ então existe $m_1 > 0$ tal que $|B(a,\zeta)| \leq m_1$ para todo $(a,\zeta) \in [0,L] \times [0,L]$. Então

$$\left|\overline{B}u(a) - \overline{B}u_0(a)\right| \leq m_1 L \|u - u_0\|$$

e $\left\|\overline{B}u - \overline{B}u_0\right\| \to 0$ quando $\|u - u_0\| \to 0$. Agora verifiquemos que $\overline{B}$ é compacto. Seja $(u_n)_n$ uma sequência limitada em $C[0,L]$, isto é, existe $m_2 \in \mathbf{R}$ tal que $\|u_n\| = \sup\limits_{a \in [0,L]} |u_n(a)| \leq m_2$ para todo n. Sejam dados $\varepsilon > 0$ e $a_1, a_2 \in [0,L]$. Temos que

$$\begin{aligned} \left|\overline{B}u_n(a_1) - \overline{B}u_n(a_2)\right| &= \left|\int_0^L B(a_1,\zeta)\,u_n(\zeta)\,d\zeta - \int_0^L B(a_2,\zeta)\,u_n(\zeta)\,d\zeta\right| \\ &\leq m_2 \int_0^L |B(a_1,\zeta) - B(a_2,\zeta)|\,d\zeta. \end{aligned}$$

Sendo B contínuo no conjunto compacto $[0,L] \times [0,L]$, existe $\delta > 0$ tal que se $|a_1 - a_2| \leq \delta$ então $|B(a_1,\zeta) - B(a_2,\zeta)| \leq \frac{\varepsilon}{m_2 L}$. Assim $\left(\overline{B}(u_n)\right)_n$ é eqüicontínua; a limitação de $\left(\overline{B}(u_n)\right)_n$ pode ser verificada facilmente. Do Teorema 3 (Teorema de Ascoli), segue que $\left(\overline{B}(u_n)\right)_n$ tem uma subsequência que converge na norma em $C[0,L]$. Desde que $\overline{B}$ leva uma sequência limitada em uma sequência que possui uma subsequência convergente, o Teorema 2 (Critério de Compacidade) garante que $\overline{B}$ é um operador compacto.

iv) $\overline{f}$ é contínua. Sejam $u, u_0 \in C[0,L]$ e $\zeta \in [0,L]$. Como

$$\begin{aligned}
\left|\overline{f}u(\zeta) - \overline{f}u_0(\zeta)\right| &= \left|M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))\, u(\zeta) - M(\zeta, u_0(\zeta), \nu(\zeta))\, u_0(\zeta)\right| \\
&\leq \{\left|M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))\, u(\zeta) - M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))\, u_0(\zeta)\right| + \\
&\quad \left|M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))\, u_0(\zeta) - M(\zeta, u_0(\zeta), \nu(\zeta))\, u_0(\zeta)\right|\} \\
&\leq \{\left|M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))\right| \|u - u_0\| + \\
&\quad \left|M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta)) - M(\zeta, u_0(\zeta), \nu(\zeta))\right| \|u_0\|\} \\
&\leq m\|u - u_0\| + \|u_0\| \left[k_1 \|u - u_0\| + R(u(\zeta), u_0(\zeta))\right].
\end{aligned}$$

e desde que $\lim\limits_{\|\lambda_1 - \lambda_2\| \to 0} R(\lambda_1, \lambda_2) = 0$, então $\left\|\overline{f}u - \overline{f}u_0\right\| \to 0$ quando $\|u - u_0\| \to 0$.

v) $\overline{f}$ é limitado. De fato,

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{f}u\right\| &= \sup_{\zeta \in [0,L]} \left|\overline{f}u(\zeta)\right| \\
&= \sup_{\zeta \in [0,L]} \left|M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))\, u(\zeta)\right| \\
&= \sup_{\zeta \in [0,L]} \left|M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))\right| |u(\zeta)| \\
&\leq m\|u\|.
\end{aligned}$$

Lema 2: *O operador T, definido pela equação (2.9), tem derivada forte de Fréchet em $0 \in C[0,L]$ na direção do cone $C[0,L]^+$ dada pela equação*

$$T'(0)\, h(a) = \int_0^L B(a, \zeta)\, M(\zeta, 0, \nu(\zeta))\, h(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.10}$$

Além disso, $T'(0)$ é um operador linear, fortemente positivo e completamente contínuo.

Dem.: i) Calculemos inicialmente a expressão $T'(0)$. Sejam $u, h \in C[0,L]^+$, então

$$\begin{aligned}
&T(u+h)(a) - T(u)(a) = \\
&= \int_0^L B(a,\zeta) M(\zeta,(u+h)(\zeta),\nu(\zeta))(u+h)(\zeta)\, d\zeta - \\
&\int_0^L B(a,\zeta) M(\zeta,u(\zeta),\nu(\zeta)) u(\zeta)\, d\zeta \\
&= \int_0^L B(a,\zeta)\left[M(\zeta,(u+h)(\zeta),\nu(\zeta)) - M(\zeta,u(\zeta),\nu(\zeta))\right] u(\zeta)\, d\zeta + \\
&+ \int_0^L B(a,\zeta) M(\zeta,(u+h)(\zeta),\nu(\zeta)) h(\zeta)\, d\zeta.
\end{aligned}$$

Assim, temos em $u \equiv 0$ que

$$\begin{aligned}
&T(h)(a) - T(0)(a) = \\
&= \int_0^L B(a,\zeta) M(\zeta,h(\zeta),\nu(\zeta)) h(\zeta)\, d\zeta \\
&= \int_0^L B(a,\zeta)\left[M(\zeta,h(\zeta),\nu(\zeta)) - M(\zeta,0,\nu(\zeta))\right] h(\zeta)\, d\zeta + \\
&\int_0^L B(a,\zeta) M(\zeta,0,\nu(\zeta)) h(\zeta)\, d\zeta.
\end{aligned}$$

Definindo $\varpi(a,h)$ pela equação

$$\varpi(a,h) = \int_0^L B(a,\zeta)\left[M(\zeta,h(\zeta),\nu(\zeta)) - M(\zeta,0,\nu(\zeta))\right] h(\zeta)\, d\zeta,$$

temos

$$\begin{aligned}
|\varpi(a,h)| &= \left|\int_0^L B(a,\zeta)\left[M(\zeta,h(\zeta),\nu(\zeta)) - M(\zeta,0,\nu(\zeta))\right] h(\zeta)\, d\zeta\right| \\
&\leq \int_0^L |B(a,\zeta)|\left[k_1 |h(\zeta)| + R(h(\zeta),0)\right] |h(\zeta)|\, d\zeta,
\end{aligned}$$

que resulta, usando a relação $\lim\limits_{\|h\|\to 0} R(h(\zeta),0) = 0$, em

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\varpi(a,h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Segue da definição de derivada de Fréchet que

$$T'(0)\,h(a) = \int_0^L B(a,\zeta)\,M(\zeta,0,\nu(\zeta))\,h(\zeta)\,d\zeta.$$

ii) $T'(0)$ é fortemente positivo. Suponhamos $0 \neq h \in C[0,L]^+$, ou seja, existe $\zeta^* \in [0,L]$ tal que $h(\zeta^*) \neq 0$. Se $T'(0)\,h(a^*) = 0$ para algum $a^* \in [0,L]$ então

$$\int_0^L B(a^*,\zeta)\,M(\zeta,0,\nu(\zeta))\,h(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Desde que $B(a,\zeta)\,M(\zeta,0,\nu(\zeta))\,h(\zeta)$ é uma função positiva e contínua em ζ para cada a, temos que

$$B(a^*,\zeta)\,M(\zeta,0,\nu(\zeta))\,h(\zeta) = 0$$

para todo ζ. Particularmente em ζ^* temos

$$B(a^*,\zeta^*)\,M(\zeta^*,0,\nu(\zeta^*))\,h(\zeta^*) = 0.$$

Assim, segue que

$$B(a^*,\zeta^*) = 0,$$

o que implica em $\beta(a^*,a') = 0$ para todo $a' \in [\zeta^*,L]$, o que não é possível devido a condição (a) sobre $\beta(a,a')$.

iii) Sendo $T'(0)$ um operador linear, a verificação que o mesmo é completamente contínuo faz-se de modo análogo a demonstração de que o operador $\overline{B}$ do Lema 1 é completamente contínuo. Sendo tal cálculo extenso mas de idêntica verificação, optamos por exclui-lo da demonstração.

Temos então que o operador T dado pela equação (2.9) é positivo e completamente contínuo. Sua derivada forte de Fréchet em 0 na direção do cone $C[0,L]^+$ é dada pela equação (2.10) que é um operador linear, fortemente positivo e completamente contínuo.

Para demonstrarmos que $R_0 = r(T'(0))$, usamos os Teoremas 4 e 5 enunciados abaixo, cujas respectivas provas podem ser encontradas em Krasnosel'skii [27], página 135 e Deimling [10], página 228. Nos enunciados destes teoremas X, K e A são espaço, cone e operador gerais.

Teorema 4: *Seja A um operador positivo (com $A(0) = 0$) tendo a derivada forte de Fréchet $A'(0)$ e a derivada assintótica forte $A'(\infty)$, ambas com respeito ao cone. Suponhamos que o espectro do operador $A'(\infty)$ esteja contido no círculo $\{\xi \in \mathbf{C}; |\xi| \leq \rho < 1\}$, $A'(0)$ tenha em K um autovetor h_0 cujo autovalor é maior que 1, ou seja,*

$$T'(0)\, h_0 = \xi_0 h_{0,}$$

onde $\xi_0 > 1$ e $A'(0)$ não tenha em K autovetores correspondendo ao autovalor 1. Se A é um operador completamente contínuo então A tem pelo menos um ponto fixo no cone.

Teorema 5: *Sejam X um espaço de Banach, $K \subset X$ um cone sólido, isto é, $int(K) \neq \emptyset$, e $A : X \longrightarrow X$ um operador linear, fortemente positivo e compacto. Então:*

i) $r(A) > 0$, onde $r(A)$ é um autovalor simples com autovetor $x \in int(K)$ e não existe outro autovalor com autovetor positivo.

ii) Se ξ é um autovalor e $\xi \neq r(A)$ então $|\xi| < r(A)$.

iii) Se $S : X \longrightarrow X$ é um operador linear limitado e $Sx \geq Ax$ em K, então $r(S) \geq r(A)$. Além disto, se $Sx > Ax$ para $x \in K, x > 0$ então $r(S) > r(A)$.

O Teorema 6, enunciado e demonstrado a seguir, estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução não-trivial da equação

$$\lambda(a) = \int_0^L B(a, \zeta)\, M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta))\, \lambda(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.11}$$

a qual seja, que o raio espectral da derivade de Fréchet de um certo operador integral seja estritamente maior que 1. Resultado semelhante foi obtido por Inaba [23] e Greenhalgh [19], contudo, em ambos os casos, encontramos a exigência de que a taxa de contato $\beta(a, a')$, que faz parte da função $B(a, \zeta)$, seja estritamente positiva. Tal restrição, em nosso caso, não ocorre.

O trabalho de Lopez e Coutinho [30] também obtém a mesma caracterização para a existência, via raio espectral, sendo que o resultado é obtido de forma diversa da nossa.

Teorema 6 (Teorema de Existência): *Seja o operador $T : C[0,L] \to C[0,L]$ definido pela equação (2.9), ou seja,*

$$Tu(a) = \int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))\, u(\zeta)\, d\zeta.$$

Se $r(T'(0)) \leq 1$, então a única solução da equação (2.11), ou seja,

$$\lambda(a) = \int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta))\, \lambda(\zeta)\, d\zeta,$$

é a solução trivial. Caso contrário, se $r(T'(0)) > 1$, então existe pelo menos uma solução positiva não-trivial para esta equação.

Dem.: Seguimos inicialmente o mesmo argumento usado por Greenhalgh [18].

Suponhamos $r(T'(0)) \leq 1$ e que a equação (2.11) tenha uma solução positiva não-trivial λ^*, isto é,

$$\lambda^*(a) = \int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, \lambda^*(\zeta), \nu(\zeta))\, \lambda^*(\zeta)\, d\zeta.$$

Sendo $\lambda^* > 0$ e $M(\zeta, \lambda, \nu)$ estritamente monótona decrescente em λ, temos

$$\int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, \lambda^*(\zeta), \nu(\zeta))\, \lambda^*(\zeta)\, d\zeta < \int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, 0, \nu(\zeta))\, \lambda^*(\zeta)\, d\zeta$$

ou seja,

$$\int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, \lambda^*(\zeta), \nu(\zeta))\, \lambda^*(\zeta)\, d\zeta < T'(0)\, \lambda^*(a).$$

Como ambos os lados da equação acima são contínuos no conjunto compacto $[0,L]$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\lambda^*(1+\varepsilon) < T'(0)\, \lambda^*.$$

Iterando n vezes a equação anterior e desde que $T'(0)$ é linear e positivo temos

$$\lambda^*(1+\varepsilon)^n < T'(0)^n \lambda^*.$$

Assim

$$\|\lambda^*(1+\varepsilon)^n\| < \|T'(0)^n \lambda^*\| \leq \|T'(0)^n\| \, \|\lambda^*\|$$

o que implica

$$(1+\varepsilon)^n < \|T'(0)^n\|,$$

para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Segue da Fórmula de Gelfand que $r(T'(0)) > 1$, o que é uma contradição e, portanto, a única solução possível é a trivial.

Suponhamos agora que $r(T'(0)) > 1$. Primeiramente calculemos $T'(\infty)$. Para todo $u \in K$, como

$$\frac{T(tu)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^L B(a,\zeta) M(\zeta, tu(\zeta), \nu(\zeta)) tu(\zeta) \, d\zeta,$$

toma-se $x = tu$ na condição (f) e temos

$$\lim_{t \to \infty} \frac{T(tu)}{t} = 0,$$

o que resulta em $T'(\infty) = 0$. Mais que isto, T é fortemente assintoticamente linear com respeito ao cone $C[0,L]^+$, ou seja,

$$\lim_{R \to \infty} \sup_{\|x\| \geq R, x \in K} \frac{\|Tx - T'(\infty) x\|}{\|x\|} = 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sup_{a \in [0,L]} \left| \int_0^L B(a,\zeta) M(\zeta, x(\zeta), \nu(\zeta)) x(\zeta) \, d\zeta \right| \\ &\leq m' \int_0^L M(\zeta, x(\zeta), \nu(\zeta)) x(\zeta) \, d\zeta, \end{aligned}$$

onde $m' = \sup\limits_{a,\zeta \in [0,L]} |B'(a,\zeta)|$. Então

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|\geq R, x\in K} \tfrac{\|Tx - T'(\infty)x\|}{\|x\|} &= \lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|\geq R, x\in K} \tfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \\ &\leq \lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|\geq R, x\in K} \tfrac{1}{\|x\|} m' \int_0^L M(\zeta, x(\zeta), \nu(\zeta))\, x(\zeta)\, d\zeta.\end{aligned}$$

Pela condição (f) temos que $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \int_0^L M(\zeta, x(\zeta), \nu(\zeta))\, x(\zeta)\, d\zeta < \infty$ e como $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \frac{1}{\|x\|} =$ 0, segue-se que $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{\|x\|\geq R, x\in K} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0$, ou seja, T é fortemente assintoticamente linear com respeito ao cone $C[0,L]^+$, onde a derivada assintótica forte com respeito ao cone $C[0,L]^+$ é dada por $T'(\infty) = 0$, cujo único autovalor é 0. Consideremos a identidade $\xi_0 = r(T'(0))$ no Teorema 4. De acordo com o Teorema 5, $r(T'(0))$ é um autovalor simples de $T'(0)$ com autovetor no $int(K)$ e não existe outro autovalor de $T'(0)$ com autovetor positivo. Obviamente, sendo $T'(0)$ um operador positivo e $r(T'(0)) > 1$, 1 não pode ser um autovalor positivo de $T'(0)$ pelo argumento anterior. Desde que T é completamente contínuo, todas as condições do Teorema 4 são satisfeitas, o que resulta que a equação (2.11) tem pelo menos uma solução não-trivial.

Finalmente, mostremos que $r(T'(0))$ é R_0 pelo critério de bifurcação.

A Definição 2 e o Teorema 7 que seguem podem ser encontrados em Griffell [17] na página 328.

Definição 2: *Seja X um espaço de Banach e A um operador sobre X com $A(0) = 0$. $\eta_0 \in \mathbf{R}$, um parâmetro escalar, é um* ***ponto de bifurcação de zero*** *da equação*

$$Au = \eta u,$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta_\varepsilon \in \mathbf{R}$ e $u_\varepsilon \neq 0$, $u_\varepsilon \in X$ tal que $Au_\varepsilon = \eta_\varepsilon u_\varepsilon$, $|\eta_0 - \eta_\varepsilon| \leq \varepsilon$ e $\|u_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

Teorema 7: *Considere a equação $Au = \eta u$ onde A é um operador não-linear, compacto, Fréchet diferenciável em $u = 0$, tal que $A(0) = 0$. Então:*

i) Todo ponto de bifurcação de zero é um autovalor do operador linear $A'(0)$.

ii) Todo autovalor de $A'(0)$ com multiplicidade (algébrica) ímpar é um ponto de bifurcação de zero de $Au = \eta u$.

Teorema 8: *$r(T'(0))$ é o único ponto de bifurcação de zero de $Tx = \xi x$, onde T é o operador definido pela equação (2.9).*

Dem.: Pelo Teorema 5 (i) $r(T'(0))$ é um autovalor simples de $T'(0)$, e portanto, de acordo com o Teorema 7, um ponto de bifurcação de T. Suponhamos que exista $\xi^* > 0$ um ponto de bifurcação de zero de $Tx = \xi x$. Uma vez que estamos interessados em autovalores positivos (são aqueles autovalores cujos autovetores associados são positivos) podemos assumir que existem seqüências (ξ_n) e (x_n) tais que $\xi_n \to \xi^*$ e $x_n \to 0$, quando $n \to \infty$, onde $x_n \in K \setminus \{0\}$ e $Tx_n = \xi_n x_n$.

Sendo T Fréchet diferenciável em $u = 0$ na direção do cone $C[0,L]^+$, temos

$$Tx_n = T(0) + T'(0)\,x_n + \varpi(0, x_n) = \xi_n x_n,$$

onde $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\|\varpi(0,x_n)\|}{\|x_n\|} = 0$. Como $T(0) = 0$ segue que

$$T'(0)\,\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{\varpi(0,x_n)}{\|x_n\|} = \xi_n \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Sendo $T'(0)$ um operador compacto e $\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$ uma seqüência limitada, podemos assumir que existe $y \in C[0,L]^+$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ T'(0)\,\frac{x_n}{\|x_n\|} \right\} = y.$$

Temos então

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n \frac{x_n}{\|x_n\|} = \lim_{n\to\infty} T'(0)\,\frac{x_n}{\|x_n\|} = y.$$

Por sua vez, da linearidade e continuidade de $T'(0)$ segue

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n\to\infty} T'(0)\,\tfrac{x_n}{\|x_n\|} && = \lim_{n\to\infty} T'(0)\left(\tfrac{1}{\xi_n}\xi_n \tfrac{x_n}{\|x_n\|}\right) \\ &= T'(0)\left(\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{\xi_n}\xi_n \tfrac{x_n}{\|x_n\|}\right) && = T'(0)\left(\tfrac{1}{\xi^*} y\right), \end{aligned}$$

ou seja, $T'(0)(y) = \xi^* y$ e ξ^* é um autovalor positivo de $T'(0)$. Assim $\xi^* \leq r(T'(0))$. Se $0 < \xi^* < r(T'(0))$ então ξ^* é um autovalor de $T'(0)$ com autovetor positivo, o que não é possível pelo Teorema 5 (i). Então $\xi^* = r(T'(0))$ e portanto, $r(T'(0))$ é o único ponto de bifurcação de zero de $Tx = \xi x$.

Vemos então que, considerando no operador (2.9) as funções $M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta))$ e $B(a, \zeta)$ dadas, respectivamente, pela equações (2.7) e (2.8), temos que $r(T'(0))$ é exatamente R_0, uma vez que, se $r(T'(0)) \leq 1$, então a única solução possível para a equação (2.6) é a solução trivial, ou seja, a força de infecção é nula, e se $r(T'(0)) > 1$ então a equação (2.6) tem pelo menos uma solução não-trivial, ou seja, existe uma força de infecção distinta da trivial. Além do mais, $r(T'(0))$ é a único ponto de bifurcação de zero do operador (2.9).

Na próxima seção enfocamos a questão da estabilidade local da solução não-trivial.

2.2 A unicidade da solução não-trivial

Nesta seção estudamos condições suficientes para que a solução não-trivial da equação (2.4) seja única e possa ser atingida por aproximações sucessivas. São utilizados resultados acerca de operadores côncavos e as definições, enunciados e demonstrações podem ser encontrados em Krasnosels'kii [27] nas páginas 185, 188 e 192, respectivamente.

Definição 3: *Um operador $A : E \rightarrow E$, onde E é um espaço de Banach com cone K, é* ***côncavo*** *se existe um elemento não-nulo $u_0 \in K$ tal que para um arbitrário $x \in K$, $x \neq 0$, as inequações*

$$\alpha(x) u_0 \leq Ax \leq \beta(x) u_0,$$

onde $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são positivos, são válidas (em particular, se as desigualdades anteriores se verificam o operador A é chamado **u_0-limitado**) *e, se para todo $x \in K$ tal que*

$$\alpha_1(x) u_0 \leq x \leq \beta_1(x) u_0,$$

com $\alpha_1(x), \beta_1(x) > 0$, a relação

$$A(tx) \geq tA(x),$$

com $0 \leq t \leq 1$, é verdadeira.

Definição 4: *O operador $A : E \to E$, onde E é um espaço de Banach com cone K, é* **u$_0$-monótono** *se é côncavo; para todo $x \in K$ tal que $x \geq \xi u_0$ $(\xi > 0)$ e para $t \neq 0$ e 1 então $A(tx) \neq tA(x)$ e segue de $x > y$ que $Ax \geq Ay + \varepsilon_0 u_0$, onde $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x, y) > 0$.*

Teorema 9: *Se o operador A é u_0-monótono, então a equação*

$$Ax = \eta x$$

não tem duas soluções não-nulas distintas no cone para um valor do parâmetro η.

Teorema 10: *Consideremos a equação*

$$Ax = x,$$

onde A é um operador côncavo monótono tendo uma única solução não-nula x^* no cone K. Se o cone K é normal e o operador A é completamente contínuo então as sucessivas aproximações

$$x_n = Ax_{n-1}, (n = 1, 2, ...)$$

convergem com respeito a norma para x^* independente da aproximação inicial $x_0 \in K$, $x_0 \neq 0$.

Seja $\mathbf{T}$ o operador agindo no espaço de Banach $C[0, L]$ com cone $C[0, L]^+$ definido por

$$\mathbf{T}u(a) = \int_0^L \mathbf{B}(a, \zeta)\, e^{-\int_0^\zeta u(s)ds} u(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.12}$$

com o núcleo $\mathbf{B}(a, \zeta)$, o qual é dado pela equação (2.5), reescrito como

$$\mathbf{B}(a, \zeta) = \sigma X_b e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} G(a, s)\, ds, \tag{2.13}$$

onde

$$G(a, s) = \int_s^L \beta(a, a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da'. \tag{2.14}$$

A equação (2.12) pode ser reescrita como

$$\mathbf{T}u\left(a\right)=\mathbf{B}\left(a,0\right)+\int\limits_{0}^{L}e^{-\int\limits_{0}^{\zeta}u(s)ds}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}\left(a,\zeta\right)d\zeta, \tag{2.15}$$

de maneira que temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}u-\mathbf{T}v &= \left[\mathbf{B}\left(a,0\right)+\int\limits_{0}^{L}e^{-\int\limits_{0}^{\zeta}u(s)ds}\tfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}\left(a,\zeta\right)d\zeta\right. \\
&\qquad \left.-\mathbf{B}\left(a,0\right)-\int\limits_{0}^{L}e^{-\int\limits_{0}^{\zeta}v(s)ds}\tfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}\left(a,\zeta\right)d\zeta\right] \\
&= \int\limits_{0}^{L}\left[e^{-\int\limits_{0}^{\zeta}u(s)ds}-e^{-\int\limits_{0}^{\zeta}v(s)ds}\right]\tfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}\left(a,\zeta\right)d\zeta \\
&= \int\limits_{0}^{L}e^{-\int\limits_{0}^{\zeta}v(s)ds}\left[e^{-\int\limits_{0}^{\zeta}u(s)ds+\int\limits_{0}^{\zeta}v(s)ds}-1\right]\tfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}\left(a,\zeta\right)d\zeta \\
&= \int\limits_{0}^{L}e^{-\int\limits_{0}^{\zeta}v(s)ds}\left[e^{-\int\limits_{0}^{\zeta}(u(s)-v(s))ds}-1\right]\tfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}\left(a,\zeta\right)d\zeta,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{T}u-\mathbf{T}v=\int\limits_{0}^{L}e^{-\int\limits_{0}^{\zeta}v(s)ds}\left[e^{-\int\limits_{0}^{\zeta}(u(s)-v(s))ds}-1\right]\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}\left(a,\zeta\right)d\zeta.$$

Se $u>v$ e $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}\left(a,\zeta\right)<0$ temos $\mathbf{T}u>\mathbf{T}v$, e então o operador $\mathbf{T}$ é monótono.

Calculando $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}\left(a,\zeta\right)$ temos

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}\left(a,\zeta\right) &= \sigma X_b\tfrac{\partial}{\partial\zeta}\left[e^{\sigma\zeta-\int\limits_{0}^{\zeta}\nu(s)ds}\int\limits_{\zeta}^{L}e^{-s(\sigma-\gamma)}G\left(a,s\right)ds\right] \\
&= \sigma X_b\left\{\left[\sigma-\tfrac{d}{d\zeta}\int\limits_{0}^{\zeta}\nu\left(s\right)ds\right]e^{\sigma\zeta-\int\limits_{0}^{\zeta}\nu(s)ds}\int\limits_{\zeta}^{L}e^{-s(\sigma-\gamma)}G\left(a,s\right)ds\right. \\
&\qquad \left.-e^{\sigma\zeta-\int\limits_{0}^{\zeta}\nu(s)ds}e^{-\zeta(\sigma-\gamma)}G\left(a,\zeta\right)\right\},
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta}(a,\zeta) &= -\sigma X_b e^{-\int_0^{\zeta}\nu(s)ds}\left\{\left(\frac{d}{d\zeta}\int_0^{\zeta}\nu(s)\,ds\right)e^{\sigma\zeta}\int_{\zeta}^{L}e^{-s(\sigma-\gamma)}G(a,s)\,ds\right.\\ &\left.+e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)-\sigma e^{\sigma\zeta}\int_{\zeta}^{L}e^{-s(\sigma-\gamma)}G(a,s)\,ds\right\}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Observe que, sendo

$$\left(\frac{d}{d\zeta}\int_0^{\zeta}\nu(s)\,ds\right)e^{\sigma\zeta}\int_{\zeta}^{L}e^{-s(\sigma-\gamma)}G(a,s)\,ds \tag{2.17}$$

positivo, temos que, se

$$e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)-\sigma\int_{\zeta}^{L}e^{-\sigma(s-\zeta)}e^{\gamma s}G(a,s)\,ds>0,$$

então $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta}(a,\zeta)<0$.

Contudo,

$$\begin{aligned}\int_{\zeta}^{L}e^{-\sigma(s-\zeta)}e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)\,ds &= e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)\left(\frac{e^{-\sigma(s-\zeta)}}{-\sigma}\right)_{s=\zeta}^{L}\\ &= e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)\left[\frac{1}{\sigma}-\frac{e^{-\sigma(L-\zeta)}}{\sigma}\right]\end{aligned}$$

e, portanto,

$$e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)=\sigma\int_{\zeta}^{L}e^{-\sigma(s-\zeta)}e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)\,ds+e^{\gamma\zeta-\sigma(L-\zeta)}G(a,\zeta).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}&e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)-\sigma\int_{\zeta}^{L}e^{-\sigma(s-\zeta)}e^{\gamma s}G(a,s)\,ds=\\ &=\sigma\int_{\zeta}^{L}e^{-\sigma(s-\zeta)}e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)\,ds+e^{\gamma\zeta-\sigma(L-\zeta)}G(a,\zeta)-\sigma\int_{\zeta}^{L}e^{-\sigma(s-\zeta)}e^{\gamma s}G(a,s)\,ds\\ &=e^{\gamma\zeta-\sigma(L-\zeta)}G(a,\zeta)+\sigma\int_{\zeta}^{L}e^{-\sigma(s-\zeta)}\left[e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)-e^{\gamma s}G(a,s)\right]ds.\end{aligned}$$

Como

$$e^{\gamma\zeta-\sigma(L-\zeta)}G(a,\zeta) \tag{2.18}$$

é estritamente positivo, se $e^{\gamma s}G(a,s)$ é decrescente em s para todo a então $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial\zeta}(a,\zeta)<0$.

Definamos a função $H(a,s)$ como

$$H(a,s)=e^{\gamma s}G(a,s), \tag{2.19}$$

onde $G(a,s)$ é dada pela equação (2.14).

Teorema 11 (Condição Forte): *Se a função $H(a,s)$, dada pela equação (2.19), é decrescente em s para cada a, então o operador $\mathbf{T}$ é completamente contínuo e u_0-monótono, onde $u_0\equiv 1$.*

Dem.: i) $\mathbf{T}$ é positivo e completamente contínuo. Isto já foi verificado no Lema 1, uma vez que $\mathbf{T}$ é o operador definido pela equação (2.9) com

$$B(a,\zeta)=\sigma X_b\int_{\zeta}^{L}e^{-\sigma(s-\zeta)}e^{\gamma s}\left[\int_{s}^{L}\beta\left(a,a'\right)e^{-(\mu+\gamma)a'}da'\right]ds$$

e $M(\zeta,u(\zeta),\nu(\zeta))=e^{-\int_0^{\zeta}u(s)ds}e^{-\int_0^{\zeta}\nu(s)ds}$.

ii) Para um arbitrário e não-nulo $u\in K$, as inequações

$$\alpha(u)\,u_0\leq \mathbf{T}u\leq\beta(u)\,u_0,$$

onde $\alpha(u)$ e $\beta(u)$ são positivos, são válidas. Desde que

$$\begin{aligned}\mathbf{T}u(a)&=\int_0^L\mathbf{B}(a,\zeta)\,e^{-\int_0^{\zeta}u(s)ds}u(\zeta)\,d\zeta\\&=\int_0^L\mathbf{B}(a,\zeta)\,\frac{d}{d\zeta}\left[-e^{-\int_0^{\zeta}u(s)ds}\right]d\zeta,\end{aligned}$$

considerando o Primeiro Teorema do Valor Médio (Bartle [7], página 232) temos que existe um $\zeta^* \in [0, L]$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{T}u(a) &= \mathbf{B}(a, \zeta^*) \int_0^L \frac{d}{d\zeta}\left[-e^{-\int_0^\zeta u(s)ds}\right] d\zeta \\ &= \mathbf{B}(a, \zeta^*)\left[1 - e^{-\int_0^L u(s)ds}\right].\end{aligned}$$

Tomando $b = \inf_{a,\zeta \in [0,L]} |\mathbf{B}(a, \zeta)|$ e $\widehat{B} = \sup_{a,\zeta \in [0,L]} |\mathbf{B}(a, \zeta)|$ temos

$$\alpha(u) u_0 \leq \mathbf{T}u \leq \beta(u) u_0,$$

onde $u_0 \equiv 1$, $\alpha(u) = b\left[1 - e^{-\int_0^L u(s)ds}\right]$ e $\beta(u) = \widehat{B}\left[1 - e^{-\int_0^L u(s)ds}\right]$. Note que se $b = 0$ então existe a' e ζ' tal que $\mathbf{B}(a', \zeta') = 0$, mas já foi demostrado que isto não é possível.

iii) Para todo $u \in K$ tal que

$$\alpha_1(u) u_0 \leq u \leq \beta_1(u) u_0,$$

com $\alpha_1(u)$, $\beta_1(u) > 0$, temos verificada a inequação

$$\mathbf{T}(tu) > t\mathbf{T}u$$

com $0 < t < 1$. Desde que

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(tu) - t\mathbf{T}u &= \left[\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int_0^\zeta tu(s)ds}\, tu(\zeta)\, d\zeta - \right. \\
&\left. t\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int_0^\zeta u(s)ds}\, u(\zeta)\, d\zeta\right] \\
&= t\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\left[e^{-\int_0^\zeta tu(s)ds} - e^{-\int_0^\zeta u(s)ds}\right] u(\zeta)\, d\zeta \\
&= t\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int_0^\zeta u(s)ds}\left[e^{-\int_0^\zeta tu(s)ds + \int_0^\zeta u(s)ds} - 1\right] u(\zeta)\, d\zeta \\
&= t\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int_0^\zeta u(s)ds}\left[e^{(1-t)\int_0^\zeta u(s)ds} - 1\right] u(\zeta)\, d\zeta,
\end{aligned}$$

temos

$$\mathbf{T}(tu) - t\mathbf{T}u > 0.$$

iv) Para $u > v$ segue que $\mathbf{T}u \geq \mathbf{T}v + \varepsilon_0 u_0$, onde $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(u,v) > 0$. Usando a equação (2.15) temos

$$\mathbf{T}u - \mathbf{T}v = \int_0^L e^{-\int_0^\zeta v(s)ds}\left[e^{-\int_0^\zeta (u(s)-v(s))ds} - 1\right] \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta}(a,\zeta)\, d\zeta.$$

Desde que $H(a,s)$ é decrescente em s para todo a temos que

$$\sigma \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)}\left[e^{\gamma\zeta} G(a,\zeta) - e^{\gamma s} G(a,s)\right] ds > 0.$$

Como as equações (2.17) e (2.18) sempre são positiva e estritamente positiva, respectivamente, então $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta}(a,\zeta) < 0$. Assim, segue que

$$\mathbf{T}u - \mathbf{T}v = \int_0^L e^{-\int_0^\zeta v(s)ds}\left[e^{-\int_0^\zeta (u(s)-v(s))ds} - 1\right] \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta}(a,\zeta)\, d\zeta > 0.$$

No teorema que segue, temos caracterizada uma condição suficiente para que a solução não-trivial da equação (2.4) seja única. Inaba [23] obtém resultado semelhante usando um modelo SIR. Em nosso caso, além de utilizarmos um modelo SEIR, ou seja, incluirmos a classe dos expostos ou latentes, estamos considerando um esquema de vacinação, que é dado pela função $\nu(a)$. Afora isso, exibimos uma seqüência recursiva que permite obter a solução não-trivial a partir de qualquer aproximação inicial escolhida em $C[0,L]^{+} \setminus \{0\}$.

Teorema 12 (Teorema de Unicidade): *Seja o operador* $\mathbf{T} : C[0,L] \to C[0,L]$ *definido pela equação (2.12). Suponhamos que a função* $H(a,s)$*, dada pela equação (2.19), seja decrescente em* s *para cada* a*. Se* $r(\mathbf{T}'(0)) > 1$ *então a equação (2.4), ou seja,*

$$\lambda(a) = \int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int_0^{\zeta} \lambda(s)ds} \lambda(\zeta)\, d\zeta,$$

tem uma única solução não-trivial que é atingida por aproximações sucessivas dadas por

$$\lambda_n = \mathbf{T}\lambda_{n-1},$$

onde $n = 1, 2, ...,$ *independente da aproximação inicial* $\lambda_0 \in C[0,L]^{+}$, $\lambda_0 \neq 0$.

Dem.: Como o operador satisfaz as condições do Teorema 6 (**Teorema de Existência**) temos que, sendo $r(\mathbf{T}'(0)) > 1$, a equação integral tem pelo menos uma solução não-trivial. Do Teorema 11, $\mathbf{T}$ é completamente contínuo e u_0-monótono com $u_0 \equiv 1$. Além disto, $C[0,L]^{+}$ é um cone normal. Usando então os Teoremas 9 e 10 temos o resultado desejado.

Temos então que, se $r(\mathbf{T}'(0)) > 1$ e $H(a,s)$ é decrescente em s para cada a então a solução da equação (2.4) é não-trivial e única. Mais que isto, a solução não-trivial pode ser obtida como o limite de uma seqüência recursiva cuja aproximação inicial pode ser qualquer elemento não nulo de $C[0,L]^{+}$.

A exigência da função $H(a,s)$ ser decrescente em s para cada a pode ser substituída por outra condição. Uma vez que as equações (2.17) e (2.18) sempre são positiva e estritamente positiva, respectivamente, observando a expressão da derivada parcial $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta}(a,\zeta)$, que é dada pela equação (2.16), vemos que, mesmo quando a condição decrescente sobre $H(a,s)$ falha, se a equação

$$\left(\frac{d}{d\zeta}\int_0^{\zeta}\nu(s)\,ds\right)e^{\sigma\zeta}\int_{\zeta}^{L}e^{-s(\sigma-\gamma)}G(a,s)\,ds+e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)-\sigma e^{\sigma\zeta}\int_{\zeta}^{L}e^{-s(\sigma-\gamma)}G(a,s)\,ds \qquad (2.20)$$

for positiva, temos que $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial\zeta}(a,\zeta)$ é negativa. A equação (2.20) será chamada de **Condição Fraca,** uma vez que a condição de $H(a,s)$ ser decrescente em s para cada a implica na última.

2.3 A estabilidade da solução trivial

Nesta seção, estabelecemos condições para que a solução trivial da equação (2.4) seja localmente estável. Como no caso da existência de soluções não-triviais para a mesma, as condições de estabilidade são dadas por asserções sobre o raio espectral da derivade de Fréchet em 0 na direção do cone $C[0,L]^+$ do operador integral (2.9), onde $M(\zeta,\lambda(\zeta),\nu(\zeta))$ e $B(a,\zeta)$ são dadas pelas equações (2.7) e (2.8), respectivamente.

Sejam $x(a,t), h(a,t), y(a,t)$ e $z(a,t)$ pequenas perturbações do equilíbrio (X^*,H^*,Y^*,Z^*) dadas por

$$\begin{cases} X(a,t) &= X^*(a)+x(a,t) \\ H(a,t) &= H^*(a)+h(a,t) \\ Y(a,t) &= Y^*(a)+y(a,t) \\ Z(a,t) &= Z^*(a)+z(a,t), \end{cases} \qquad (2.21)$$

gerando uma perturbação na força de infecção dada por

$$\lambda(a,t)=\lambda^*(a)+l(a,t), \qquad (2.22)$$

onde $\lambda^*(a)$, a força de infecção na idade a no estado estacionário, é dada por

$$\lambda^*(a)=\int_0^L\beta(a,a')\,Y^*(a')\,da'$$

e a perturbação é dada por

$$l(a,t) = \int_0^L \beta(a,a')\, y(a',t)\, da'.$$

Substituindo as equações (2.21) e (2.22) no sistema de equações íntegro-diferenciais (1.1) e (1.2), e considerando somente os termos de primeira ordem, obtemos um novo sistema íntegro-diferencial dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial x}{\partial t}(a,t) &= -l(a,t)\, X^*(a) - (\lambda^*(a) + \nu(a) + \mu)\, x(a,t) \\ \\ \frac{\partial h}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial h}{\partial t}(a,t) &= l(a,t)\, X^*(a) + \lambda^*(a)\, x(a,t) - (\mu + \sigma)\, h(a,t) \\ \\ \frac{\partial y}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial y}{\partial t}(a,t) &= \sigma h(a,t) - (\mu + \gamma)\, y(a,t) \\ \\ \frac{\partial z}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial z}{\partial t}(a,t) &= \nu(a)\, x(a,t) + \gamma y(a,t) - \mu z(a,t), \end{cases} \tag{2.23}$$

com

$$l(a,t) = \int_0^L \beta(a,a')\, y(a',t)\, da' \tag{2.24}$$

e condições de fronteira

$$x(0,t) = h(0,t) = y(0,t) = z(0,t) = 0. \tag{2.25}$$

Usando o Método de Separação de variáveis para resolver o sistema de equações (2.23), consideramos soluções na forma

$$\begin{cases} x(a,t) = x(a)\, e^{\omega t} \\ h(a,t) = h(a)\, e^{\omega t} \\ y(a,t) = y(a)\, e^{\omega t} \\ z(a,t) = z(a)\, e^{\omega t}, \end{cases} \tag{2.26}$$

onde $\omega \in \mathbf{C}$. Substituindo as equações (2.26) no sistema de equações íntegro-diferenciais (2.23) e (2.24) obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{da}(a) &= -l(a)X^*(a) - (\lambda^*(a) + \mu + \nu(a) + \omega)x(a) \\ \frac{dh}{da}(a) &= l(a)X^*(a) + \lambda^*(a)x(a) - (\mu + \sigma + \omega)h(a) \\ \frac{dy}{da}(a) &= \sigma h(a) - (\mu + \gamma + \omega)y(a) \\ \frac{dz}{da}(a) &= \nu(a)x(a) + \gamma y(a) - (\mu + \omega)z(a), \end{cases} \tag{2.27}$$

onde

$$l(a) = \int_0^L \beta(a, a') y(a') da' \tag{2.28}$$

e as condições iniciais são dadas por

$$x(0) = h(0) = y(0) = z(0) = 0. \tag{2.29}$$

Resolvendo o sistema de equações (2.27) e (2.29) para então substituirmos a solução encontrada na equação (2.28), obtemos a seguinte equação integral para $l(a)$,

$$\begin{aligned} l(a) &= \int_0^L \int_0^{a'} \int_0^b \sigma X_b \beta(a, a') e^{-(\mu+\gamma+\omega)a'} e^{(\gamma-\sigma)b} e^{-\int_0^\zeta \lambda^*(s)ds - \int_0^\zeta \nu(s)ds + \sigma\zeta} \\ &\quad \times \left[l(\zeta) e^{\omega\zeta} - \lambda^*(\zeta) \int_0^\zeta l(s) e^{\omega s} ds \right] d\zeta db da', \end{aligned} \tag{2.30}$$

que, em se tratando do equilíbrio trivial, ou seja, $\lambda^* \equiv 0$, tem a forma

$$l(a) = \int_0^L \int_0^{a'} \int_0^b \sigma X_b \beta(a, a') e^{-(\mu+\gamma+\omega)a'} e^{(\gamma-\sigma)b} e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds + \sigma\zeta} l(\zeta) e^{\omega\zeta} d\zeta db da'. \tag{2.31}$$

Mudando a ordem de integração, a equação (2.31) pode ser reescrita como

$$l(a)=\int_0^L S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega)\, l(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.32}$$

onde

$$S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega)=e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds}\int_\zeta^L\left[\int_b^L \sigma X_b\beta(a,a')\, e^{-\mu a'}e^{-\omega(a'-\zeta)}e^{-\gamma(a'-b)}da'\right]e^{-\sigma(b-\zeta)}db. \tag{2.33}$$

Se tomamos nas equações (2.32) e (2.33) $\omega=0$ obtemos

$$l(a)=\int_0^L S(a,\zeta,\nu(\zeta),0)\, l(\zeta)\, d\zeta = T'(0)\, l(a), \tag{2.34}$$

onde

$$S(a,\zeta,\nu(\zeta),0)=B(a,\zeta)\, M(\zeta,0,\nu(\zeta)) \tag{2.35}$$

e $T'(0)$ é o operador dado pela equação (2.10).

Estamos interessados em verificar se o equilíbrio trivial é localmente estável ou localmente instável, e isto equivale a analisarmos se a parte real de ω é negativa ou não-negativa.

Seja ω um número real. Quando ω é positivo é fácil verificar que $S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega)$ é uma função estritamente monótona decrescente em ω. De fato, suponhamos $\omega_1<\omega_2$, desde que $f(\omega)=e^{-\omega}$ é uma função estritamente monótona decrescente em ω temos que $e^{-\omega_1(a'-\zeta)} > e^{-\omega_2(a'-\zeta)}$. Sendo $S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega)$ dada pela equação (2.33) temos então

$$\begin{aligned}
&e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds}\int_\zeta^L\left[\int_b^L \sigma X_b\beta(a,a')\, e^{-\mu a'}e^{-\omega_1(a'-\zeta)}e^{-\gamma(a'-\zeta)}da'\right]e^{-\sigma(b-\zeta)}db\\
&> e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds}\int_\zeta^L\left[\int_b^L \sigma X_b\beta(a,a')\, e^{-\mu a'}e^{-\omega_2(a'-\zeta)}e^{-\gamma(a'-\zeta)}da'\right]e^{-\sigma(b-\zeta)}db,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega_1)>S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega_2).$$

Seja R_ω o operador linear sobre o espaço de Banach $C[0,L]$ com a norma dada por $\|u\|=$

$\sup_{a\in[0,L]} |u(a)|$, com o cone $K = C[0,L]^+$, definido por

$$R_\omega l(a) = \int_0^L S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega)\, l(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.36}$$

Os seguintes lemas são usados na prova do **Teorema de Estabilidade:**

Lema 3: *O operador R_ω definido em $C[0,L]$ pela equação (2.36) é linear, fortemente positivo e completamente contínuo.*

Dem.: i) É de fácil verificação que $R_\omega u$ é um operador linear em u.

ii) R_ω fortemente positivo. Seja $l \in K = C[0,L]^+$, $l \neq 0$. R_ω é fortemente positivo se $R_\omega(l) \in int(K)$, ou seja, $R_\omega(L) > 0$. Suponhamos que exista $a^* \in [0,L]$ tal que $R_\omega(l)\, a^* = 0$, isto é,

$$R_\omega l(a^*) = \int_0^L S(a^*,\zeta,\nu(\zeta),\omega)\, l(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Sendo $S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega)\, l(\zeta)$ contínua e não-negativa e desde que estamos integrando sobre todo o intervalo $[0,L]$, então $S(a^*,\zeta,\nu(\zeta),\omega)\, l(\zeta) \equiv 0$.

Além disso, como $l \neq 0$ existe ζ^* tal que $l(\zeta^*) \neq 0$. Portanto $S(a^*,\zeta^*,\nu(\zeta^*),\omega) = 0$, ou seja,

$$e^{-\int_0^{\zeta^*}} \int_{\zeta^*}^{L} \int_{b}^{L} \sigma X_b \beta(a^*,a')\, e^{-\mu a'} e^{(\zeta^*-a')\omega} e^{(b-a')\gamma} e^{(\zeta^*-b)\sigma}\, db\, da' = 0.$$

Então $\beta(a^*,a') = 0$ para todo $a' \in [\zeta^*, L]$, o que contradiz a condição (a) sobre β. Portanto tal a^* não existe.

iii) Se $l \in C[0,L]$ então $R_\omega l \in C[0,L]$. É suficiente observar que $R_\omega l$ é uma composição de funções contínuas.

iv) $R_\omega l$ é contínuo em l. Suponhamos $l_1, l_2 \in C[0,L]$, onde $\|l_1 - l_2\| = \sup_{a\in[0,L]} |l_1(a) - l_2(a)|$.
Desejamos calcular $\|R_\omega l_1 - R_\omega l_2\| = \sup_{a\in[0,L]} |R_\omega l_1(a) - R_\omega l_2(a)|$.

Dado $a \in [0, L]$, temos

$$\begin{aligned} |R_\omega l_1(a) - R_\omega l_2(a)| &= \left| \int_0^L S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega) l_1(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. - \int_0^L S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega) l_2(\zeta) d\zeta \right| \\ &\leq \int_0^L |S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega)| |l_1(\zeta) - l_2(\zeta)| d\zeta. \end{aligned}$$

Seja $m^* \in R$ tal que $|S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega)| \leq m^*$ para todo $(a, \zeta) \in [0, L] \times [0, L]$. Dado $\varepsilon > 0$ considerando $\|l_1 - l_2\| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{m^* L}$, segue que

$$|R_\omega l_1(a) - R_\omega l_2(a)| \leq \int_0^L m^* \frac{\varepsilon}{m^* L} d\zeta = \varepsilon,$$

e $\|R_\omega l_1 - R_\omega l_2\| \leq \varepsilon$.

v) R_ω um operador compacto. Sendo R_ω um operador linear em $C[0, L]$ usamos o Teorema 2 (Critério de Compacidade) e o Teorema 3 (Teorema de Ascoli) para provar sua compacidade. Seja $(l_n)_n$ uma seqüência limitada em $C[0, L]$. $(R_\omega l_n)_n$ é uma seqüência limitada eqüicontínua. De fato, sendo $(l_n)_n$ uma seqüência limitada em $C[0, L]$ existe $m^{**} > 0$ tal que $|l_n(a)| \leq m^{**}$ para todo $n = 1, 2, ...,$ e todo $a \in [0, L]$.

Dado $\varepsilon > 0$ sejam $a_1, a_2 \in [0, L]$. Para cada $n, n = 1, 2, ...,$ temos

$$\begin{aligned} |R_\omega l_n(a_1) - R_\omega l_n(a_2)| &= \left| \int_0^L S(a_1, \zeta, \nu(\zeta), \omega) l_n(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. - \int_0^L S(a_2, \zeta, \nu(\zeta), \omega) l_n(\zeta) d\zeta \right| \\ &\leq \int_0^L m^{**} |S(a_1, \zeta, \nu(\zeta), \omega) - S(a_2, \zeta, \nu(\zeta), \omega)| d\zeta. \end{aligned}$$

Sendo S contínuo sobre conjunto compacto $[0, L]$, S é uniformemente contínuo. Portanto, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|a_1 - a_2| < \delta_1$ então

$$|S(a_1, \zeta, \nu(\zeta), \omega) - S(a_2, \zeta, \nu(\zeta), \omega)| \leq \frac{\varepsilon}{m^{**} L},$$

e conseqüentemente $|R_\omega l_n(a_1) - R_\omega l_n(a_2)| \leq \varepsilon$, isto é, $(R_\omega l_n)_n$ é eqüicontínua. Que $(R_\omega l_n)_n$ é limitada pode ser verificado facilmente. Sendo $(R_\omega l_n)_n$ uma seqüência limitada e eqüicontínua em $C[0,L]$ segue do Teorema 3 que ela tem uma subseqüência convergente. Segue então do Teorema 2 que R_ω é um operador compacto.

Lema 4: *$r(R_{\omega_2}) < r(R_{\omega_1})$ para todo $\omega_1 < \omega_2$. Em particular, $r(R_\omega) < r(T'(0))$ para todo $\omega \in \mathbf{R}$ positivo.*

Dem.: Já vimos que $S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega)$ é uma função estritamente monótona decrescente em ω. Segue então da definição de R_ω que $R_{\omega_1} > R_{\omega_2}$. Usando o Teorema 5 (iii) para $A = R_{\omega_2}$ e $S = R_{\omega_1}$ temos $r(R_{\omega_1}) > r(R_{\omega_2})$.

O Teorema 13, que segue abaixo enunciado e pode ser encontrado em Zabreyko [38] na página 138, será utilizado na demonstração do Lema 5.

Teorema 13: *Sejam E_1, E_2 espaços de Banach com cones K_1 e K_2, respectivamente. Se $A : E_1 \to E_1$ é um operador linear, $C : E_2 \to E_2$ é um operador linear positivo e $\varphi : E_1 \to K_2$ é um operador satisfazendo as seguintes condições:*

i) $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v), \forall u, v \in E_1$,

ii) se $\|\varphi(u_n)\| \to 0$ onde $n \to \infty$ então $|u_n| \to 0$ onde $n \to \infty$, e

iii) $\varphi(Au) \leq C\varphi(u), \forall u \in K_1$,

então $r(A) \leq r(C)$.

Lema 5: *Seja o operador R_ω definido pela equação (2.36) onde $\omega \in [0, +\infty)$. Então $r(R_\omega) \to 0$ quando $\omega \to +\infty$.*

Dem.: Tomando $E_1 = C[0,L]$, $E_2 = R^n$, $K_1 = C[0,L]^+$, $K_2 = \{(\zeta_1, ..., \zeta_n); \zeta_i \geq 0, i = 1, ..., n\}$, $A = R_\omega$, $\varphi(u) = \left(\left\|u|_{[a_0,a_1]}\right\|, ..., \left\|u|_{[a_{n-1},a_n]}\right\|\right)^t$ e $C = S(\omega) = (S_{ij}(\omega))_{1\leq i,j\leq n}$, onde $S_{ij}(\omega) = \sup\limits_{a_{i-1}\leq a\leq a_i} \int_{a_{j-1}}^{a_j} S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega)\,d\zeta$, segue do Teorema 13 que $r(R_\omega) \leq r(S(\omega))$. Fazendo uso do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Bartle [6], página 44) temos $S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega) \to 0$ quando $\omega \to +\infty$, particularmente, $S_{ij}(\omega) \to 0$ quando

$\omega \longrightarrow +\infty$. Desde que $r(S(\omega)) = \max_{\lambda \in \sigma(S(\omega))} |\lambda|$, temos $r(S(\omega)) \longrightarrow 0$ quando $\omega \longrightarrow +\infty$ (veja Apêndice). Obtemos portanto o resultado desejado.

Lema 6: $r(R_\omega)$ *é uma função contínua em* ω.

Dem.: Observando a expressão para $R_\omega l(a)$, dada por

$$R_\omega l(a) = \int_0^L S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega)\, l(\zeta)\, d\zeta,$$

vemos que R_ω é um operador linear, fortemente positivo e completamente contínuo definido no cone sólido $K = C[0, L]^+$. Seja r a função

$$\begin{array}{rcl} r : [0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \omega & \longmapsto & r(\omega) = r(R_\omega), \end{array}$$

que está definida em todo intervalo $[0, +\infty)$.

i) $r(\omega)$ é contínua à esquerda para todo $\omega > 0$. Seja (ω_n) uma seqüência crescente em $[0, +\infty)$ tal que $\omega_n \longrightarrow \omega$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Desde que $r(.)$ é uma função decrescente de ω temos que, sendo

$$\omega_n \;\leq\; \omega_{n+1} \;\leq\; \omega,$$

então

$$r(\omega_n) \;\geq\; r(\omega_n + 1) \;\geq\; r(\omega).$$

Sejam $r_n = r(\omega_n)$ e $r = r(\omega)$. Desde que $(r_n)_n$ é uma seqüência decrescente limitada, de acordo com Bartle [7], página 105, existe r^* tal que

$$r^* = \lim_{n \to \infty} r_n = \inf\{r_n; n = 1, 2, ...\} \geq r.$$

Para cada n seja $l_n \in C[0, L]^+$ tal que $\|l_n\| = 1$ e

$$R_{\omega_n} l_n = r_n l_n.$$

Se existe $l^* \in C[0,L]^+$ tal que $R_\omega l^* = r^* l^*$, ou seja, r^* é um autovalor de R_ω, então

$$r^* = |r^*| \leq r(R_\omega) = r,$$

e obtemos o resultado desejado.

Sendo R_ω compacto e (l_n) uma seqüência limitada podemos assumir que $(R_\omega l_n)$ é convergente. Supondo l^* tal que $R_\omega l_n \to l^*$ quando $n \to \infty$, e desde que

$$\|R_{\omega_n} l_n - R_\omega l_n\| \leq \|R_{\omega_n} - R_\omega\| \|l_n\| = \|R_{\omega_n} - R_\omega\|,$$

temos que $\|R_{\omega_n} l_n - R_\omega l_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Sendo

$$\begin{aligned} \|R_{\omega_n} l_n - l^*\| &\leq \|R_{\omega_n} l_n - l^* + R_\omega l_n - R_\omega l_n\| \\ &\leq \|R_{\omega_n} l_n - R_\omega l_n\| + \|R_\omega l_n - l^*\|, \end{aligned}$$

então $\|R_{\omega_n} l_n - l^*\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto $R_{\omega_n} l_n \to l^*$ quando $n \to \infty$.

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n}(r_n l_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n} R_{\omega_n} l_n = \frac{1}{r^*} l^*.$$

Assim

$$R_\omega(l^*) = R_\omega\left(r^* \lim_{n\to\infty} l_n\right) = r^* \lim_{n\to\infty} R_\omega(l_n) = r^* l^*.$$

ii) $r(\omega)$ é contínua à direita para todo $\omega \geq 0$. Seja (ω_n) uma seqüência decrescente tal que $\omega_n \to \omega$ quando $n \to \infty$. Como

$$\omega \leq \omega_{n+1} \leq \omega_n,$$

segue

$$r \geq r_{n+1} \geq r_n.$$

Sendo (r_n) uma seqüência crescente limitada, de acordo com Bartle [7], página 104, existe

$r^{**} \in \mathbf{R}$ tal que

$$r^{**} = \lim_{n \to \infty} r_n = \sup \{r_n; n = 1, 2, ...\} \leq r.$$

Suponhamos que $0 < r^{**} < r$. Considerando o operador resolvente de R_ω definido em um domínio $\mathcal{D}$ de $\mathbf{C}$,

$$\Re : \lambda \in \mathcal{D} \longmapsto \Re(\lambda) = (R_\omega - \lambda Id)^{-1},$$

e para cada n, $n = 1, 2, ...$, o operador resolvente de R_{ω_n} definido em um domínio $\mathcal{D}_n$ de $\mathbf{C}$

$$\Re_n : \lambda \in \mathcal{D}_n \longmapsto \Re_n(\lambda) = (R_{\omega_n} - \lambda Id)^{-1},$$

temos que ambos, R_ω e R_{ω_n}, são operadores lineares compactos e seus respectivos conjuntos de autovalores são enumeráveis com únicos possíveis pontos de acumulação sendo zero. Sendo também ambos fortemente positivos, segue do Teorema 5 que seus respectivos raios espectrais são positivos e singularidades isoladas que são pólos simples de $\Re$ e $\Re_n$, respectivamente. Desde que $\lim_{n \to \infty} r_n = r^{**} < r$ e

$$r_n = r(R_{\omega_n}) = \sup \{|\lambda|; \lambda \text{ é uma autovalor de } R_{\omega_n}\},$$

segue que existe uma vizinhança de r, $B_\varepsilon(r) = \{\lambda \in \mathbf{C} \cap \mathcal{D}; |\lambda - r| < \varepsilon\}$, tal que podemos assumir que $\Re_n$ é holomorfa em $B_\varepsilon(r)$ e sobre sua fronteira

$$\partial(B_\varepsilon(r)) = \{\lambda \in \mathbf{C} \cap \mathcal{D}; |\lambda - r| = \varepsilon\}.$$

Considerando ℓ como sendo a curva contínua, fechada e simples descrita por $\partial(B_\varepsilon(r))$, que pode ser orientada no sentido positivo, e sendo $\Re_n$ holomorfa dentro e sobre ℓ, temos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\ell \Re_n(\lambda) \, d\lambda = 0.$$

Sendo r um pólo simples de $\Re$ e a única singularidade de $\Re$ dentro de ℓ, então

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\ell \Re(\lambda) \, d\lambda = \text{resíduo de } \Re \text{ em } r \neq 0.$$

Segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \Re_n(\lambda)\, d\lambda \\ &= \tfrac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \lim_{n\to\infty} \Re_n(\lambda)\, d\lambda \\ &= \tfrac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \Re(\lambda)\, d\lambda \neq 0 \end{aligned}$$

e isto é uma contradição (Dunford e Schwartz [13]). Assim $r^{**} = r$.

Teorema 14 (Teorema de Estabilidade): *Se $r(T'(0)) \leq 1$ então o equilíbrio trivial da equação (2.4) é localmente estável. Se $r(T'(0)) > 1$ então o equilíbrio trivial da mesma é localmente instável.*

Dem.: Suponhamos $r(T'(0)) \leq 1$ e que a equação (2.32) tenha uma solução não-trivial com ω um número complexo cuja parte real ω_0 é positiva. Como

$$|R_\omega(l(a))| \leq \int_0^L S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega_0)\,|l(\zeta)|\,d\zeta,$$

temos

$$|l(a)| = |R_\omega(l(a))| \leq R_{\omega_0}(|l(a)|) < R_0(|l(a)|) = T'(0)\,|l(a)|.$$

Aplicando R_{ω_0} n vezes na equação

$$|l(a)| \leq R_{\omega_0}(|l(a)|),$$

obtemos

$$|l(a)| \leq R_{\omega_0}^n(|l(a)|),$$

e assim

$$\|l\| \leq \left\|R_{\omega_0}^n(|l|)\right\| \leq \left\|R_{\omega_0}^n\right\| \|l\|.$$

Pela Fórmula de Gelfand segue

$$r\left(R_{\omega_0}^n\right) \geq 1.$$

Do Lema 4 temos

$$r(R_{\omega_0}) < r\left(T'(0)\right),$$

então

$$1 \leq r\left(R_{\omega_0}\right) < r\left(T'(0)\right) \leq 1,$$

o que é uma contradição. Assim a única solução possível da equação (2.32) é a trivial. Supondo que $r(T'(0)) > 1$, e sendo $r(R_\omega)$ uma função decrescente em ω (Lema 4) e contínua em ω (Lema 6) e desde que $r(R_\omega) \to 0$ quando $\omega \to +\infty$ (Lema 5), existe $\omega^* > 0$ tal que $r(R_{\omega^*}) = 1$ e a correspondente autofunção de $r(R_{\omega^*})$ gera a instabilidade da solução trivial.

Temos então, como resultados deste capítulo, que:

I) na seção 2.1 mostramos que, se as funções $B(a,\zeta)$ e $M(a,u,\nu)$ satisfazem as condições (b), (c), (d) e (f), então operador (2.9) tem 1 como autovalor se e só se o raio espectral do operador linear $T'(0)$, dado pela equação (2.10), é maior que 1.

II) na seção 2.2 estabelecemos a unicidade da solução não-trivial da equação (2.4) pela verificação de uma das seguintes duas condições: a Condição Forte, ou seja, $H(a,s)$ ser decrescente em s para todo a, ou a Condição Fraca, isto é, a equação (2.20) ser positiva, e finalmente,

III) na seção 2.3, verificamos condições para a estabilidade local da solução trivial da equação (2.4) no caso em que as funções $\beta(a,a')$ e $\nu(a)$ satisfazem as condições (a) e (b), respectivamente.

No próximo capítulo são estabelecidas estimativas para o raio espectral do operador linear $T'(0)$, dado pela equação (2.10), principalmente devido a dificuldade de calculá-lo, na maioria das vezes. São também apresentados diversos exemplos considerando diferentes taxas de contato.

Capítulo 3

Estimativas para $\mathbf{R}_0$ e exemplos

Para aplicar os diversos resultados acerca do Número de Reprodutibilidade R_ν necessitamos do próprio raio espectral de $T'(0)$ ou de estimativas suficientemente boas do mesmo. Uma vez que nem sempre o cálculo do raio espectral é uma tarefa realizável, na seção que se segue apresentaremos algumas estimativas para o mesmo. Além disto, na seção subseqüente, apresentaremos exemplos de estimativas do Número de Reprodutibilidade, ou seja, $r(T'(0))$, para diferentes taxas de contato.

3.1 Estimativas para $\mathbf{R}_0$

Nesta seção, apresentamos algumas estimativas para $r(T'(0))$ a partir de alguns teoremas de Krasnosel'skii [26]. Estes teoremas apresentam estimativas do raio espectral para núcleos não-negativos usando inequações envolvendo o cálculo do operador em elementos convenientemente escolhidos no cone K. Contudo, devemos ter em mente que a acuracidade das estimativas depende fortemente da escolha dos elementos e, algumas vezes, os limites obtidos podem ser exagerados. Em aplicações é muito importante que tenhamos estimativas precisas.

Os Teoremas 15 e 16, que seguem abaixo, podem ser encontrados em Krasnosels'kii [26] nas páginas 77 e 82, respectivamente.

Teorema 15: *Se*

$$Ax_0 \geq \xi x_0,$$

onde A é um operador linear positivo, $-x_0 \notin K$ e K é um cone gerador, então o raio espectral de A satisfaz $r(A) \geq \xi$.

Teorema 16: *Seja A um operador linear positivo tal que*

$$Ax_0 \leq \eta x_0,$$

onde $x_0 \neq 0$ e $x_0 \in K$. Se K é um cone sólido e normal e x_0 é um ponto interior de K então

$$r(A) \leq \eta.$$

Estes resultados serão aplicados ao nosso operador $T'(0)$.

Teorema 17: *Seja $T'(0)$ o operador linear sobre o espaço de Banach $C[0,L]$ com cone $C[0,L]^+$ dado pela equação (2.10), com núcleo dado pela equação (2.5). Temos então as seguintes estimativas para $r(T'(0))$:*

$$\inf_{a\in[0,L]}\left\{\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta\right\} \leq r\left(T'(0)\right) \leq \sup_{a\in[0,L]}\left\{\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta\right\} \tag{3.1}$$

e

$$\inf_{a\in[0,L]}\left\{\frac{\int_0^L\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\mathbf{B}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau}{\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta}\right\} \leq r\left(T'(0)\right) \leq \sup_{a\in[0,L]}\left\{\frac{\int_0^L\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\mathbf{B}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau}{\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta}\right\}. \tag{3.2}$$

Particularmente,

$$\inf_{a\in[0,L]}\left\{\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta\right\} \leq \inf_{a\in[0,L]}\left\{\frac{\int_0^L\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\mathbf{B}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau}{\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta}\right\}$$

e

$$\sup_{a\in[0,L]}\left\{\frac{\int\limits_0^L\int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\mathbf{B}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau}{\int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta}\right\} \leq \sup_{a\in[0,L]}\left\{\int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta\right\}.$$

Dem.: Considerando o operador

$$T'(0)\,h = \int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,h(\zeta)\,d\zeta,$$

dado pela equação (2.10), cujo núcleo é dado pela equação (2.5), ou seja,

$$\mathbf{B}(a,\zeta) = \sigma X_b e^{-\int\limits_0^\zeta \nu(s)ds} \int\limits_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s}\left[\int\limits_s^L \beta\left(a,a'\right) e^{-(\mu+\gamma)a'} da'\right] ds,$$

temos que $T'(0)$ é um operador linear, fortemente positivo e completamente contínuo sobre o espaço de Banach $C[0,L]$ com cone sólido e normal $C[0,L]^{+}$. Já mostramos que este núcleo é estritamente positivo.

Considerando $x_0 \equiv 1$ temos

$$\inf_{a\in[0,L]}\left\{\int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta\right\} x_0 \leq \int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,x_0(\zeta)\,d\zeta \leq \sup_{a\in[0,L]}\left\{\int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta\right\} x_0. \tag{3.3}$$

Tomando $x_0(a) = \int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta$ então

$$T'(0)\,x_0 = \int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\left[\int\limits_0^L \mathbf{B}(\zeta,\tau)\,d\tau\right] d\zeta = \int\limits_0^L\int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\mathbf{B}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau.$$

Sendo $\mathbf{B}(a,\zeta)$ estritamente positivo, segue que x_0 é um ponto interior de K, particularmente, $\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, d\zeta > 0$. Sendo assim, temos

$$\int_0^L \int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\mathbf{B}(\zeta,\tau)\, d\zeta d\tau = \frac{\int_0^L \int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\mathbf{B}(\zeta,\tau)\, d\zeta d\tau}{\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, d\zeta} \int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, d\zeta$$

e, então,

$$\inf_{a\in[0,L]} \left\{ \frac{\int_0^L \int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\mathbf{B}(\zeta,\tau)\, d\zeta d\tau}{\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, d\zeta} \right\} x_0 \leq T'(0)\, x_0 \leq \sup_{a\in[0,L]} \left\{ \frac{\int_0^L \int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\mathbf{B}(\zeta,\tau)\, d\zeta d\tau}{\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, d\zeta} \right\} x_0. \tag{3.4}$$

Todas as considerações anteriores, juntamente com os Teoremas 15 e 16 e as inequações (3.3) e (3.4), resultam no desejado.

Particularmente, os limitantes para o raio espectral de $T'(0)$ estabelecidos na inequação (3.2) já haviam sido obtidos anteriormente por Lopez e Coutinho [30]. Contudo, a forma como nossos limitantes foram obtidos, via a escolha de elementos do cone satisfazendo as desigualdades necessárias, apresentam a vantagem de, encontrando funções mais convenientes, estabelecer melhores estimativas.

Seguem na próxima seção alguns exemplos de estimativas do Número de Reprodutibilidade, ou seja, do raio espectral de $T'(0)$, utilizando diferentes taxas de contato idade-estruturadas.

3.2 Exemplos

3.2.1 Uma taxa de contato constante

Considerando uma taxa de contato constante em todas as idades, ou seja,

$$\beta\left(a, a'\right) = \beta, \tag{3.5}$$

e uma taxa de vacinação idade-estruturada dada por

$$\nu(a) = \nu\theta(a - a_1)\theta(a_2 - a), \tag{3.6}$$

onde θ é a função de Heaviside, ν é a taxa de vacinação constante e a_1 e a_2 são idades tais que $0 \leq a_1 < a_2 \leq L$, temos que o operador sobre o espaço de Banach $C[0, L]$ com cone $C[0, L]^+$ dado por

$$T\lambda(a) = \int_0^L \overline{B}(\zeta)\, e^{-\int_0^\zeta \lambda(r)dr} \lambda(\zeta)\, d\zeta,$$

onde

$$\overline{B}(\zeta) = \beta\sigma X_b e^{-\int_0^\zeta \nu(r)dr} e^{\sigma\zeta} \int_\zeta^L e^{(\gamma-\sigma)s} \left[\int_s^L e^{-(\mu+\gamma)a'} da'\right] ds$$

é um operador positivo e completamente contínuo, com derivada forte de Fréchet em 0 na direção do cone dada por

$$T'(0)\lambda(a) = \int_0^L \overline{B}(\zeta)\lambda(\zeta)\, d\zeta,$$

que é um operador linear, fortemente positivo e completamente contínuo.

Usando o Teorema 6 (**Teorema de Existência**) temos que o Número de Reprodutibilidade R_ν é dado pelo raio espectral de $T'(0)$, ou seja,

$$R_\nu = \sup\left\{|\eta| : \eta \text{ é um autovalor de } T'(0)\right\}.$$

Usando o Teorema 5 (i) temos que $r = r(T'(0))$ é um autovalor simples com autovetor pertencente ao conjunto $int\left(C[0, L]^+\right) = \left\{f \in C[0, L]^+ : f(a) > 0, a \in [0, L]\right\}$, e não existe outro autovalor com autovetor positivo. Como $T'(0)$ tem sua imagem em $\mathbf{R}$, considerando $h(a) = \int_0^L \overline{B}(\zeta)\, d\zeta$, temos que

$$T'(0)h(a) = \int_0^L \overline{B}(\zeta)\left[\int_0^L \overline{B}\left(\tilde{\zeta}\right) d\tilde{\zeta}\right] d\zeta,$$

isto é,

$$T'(0)\,h(a) = \int_0^L \overline{B}(\zeta)\,d\zeta \int_0^L \overline{B}\left(\widetilde{\zeta}\right) d\widetilde{\zeta}.$$

Portanto

$$T'(0)\,h(a) = \eta h(a),$$

onde

$$\eta = \int_0^L \overline{B}(\zeta)\,d\zeta.$$

Portanto

$$R_\nu = \int_0^L \overline{B}(\zeta)\,d\zeta,$$

ou seja,

$$R_\nu = \beta\sigma X_b \int_0^L e^{-\int_0^\zeta \nu(r)dr} e^{\sigma\zeta} \left\{ \int_\zeta^L e^{(\gamma-\sigma)s} \left[\int_s^L e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} d\zeta.$$

Note que pelo Teorema 17, os limites inferior e superior de $r(T'(0))$ dados pela inequação (3.1) são

$$\int_0^L \overline{B}(\zeta)\,d\zeta \le r\left(T'(0)\right) \le \int_0^L \overline{B}(\zeta)\,d\zeta,$$

e sendo ambos os limites iguais, tem-se o valor exato para o Número de Reprodutibilidade R_ν.

Usando a função de Heaviside, a expressão para R_ν pode ser reescrita como

$$R_\nu = \beta\sigma X_b \int_0^L e^{-\int_0^\zeta \nu(r)dr} e^{\sigma\zeta} \left\{ \int_0^L e^{(\gamma-\sigma)s}\theta(s-\zeta) \left[\int_0^L e^{-(\mu+\gamma)a'}\theta\left(a'-s\right) da' \right] ds \right\} d\zeta,$$

e mudando as ordens de integração temos

$$R_\nu = \beta\sigma X_b \int_0^L e^{-(\mu+\gamma)a'} \left\{ \int_0^L e^{(\gamma-\sigma)s}\theta\left(a'-s\right) \left[\int_0^L e^{-\int_0^\zeta \nu(r)dr} e^{\sigma\zeta}\theta(s-\zeta)\,d\zeta \right] ds \right\} da'. \qquad (3.7)$$

Resolvendo a equação (3.7) e tomando $L \to \infty$ temos

$$R_\nu = R_0 \left\{ 1 - \frac{\nu}{(\mu+\nu)} e^{-\mu a_1} \left[1 - e^{-(\mu+\nu)(a_2-a_1)} \right] \right\}, \tag{3.8}$$

onde

$$R_0 = \frac{\beta\sigma X_b}{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)} \tag{3.9}$$

é o Número de Reprodutibilidade Basal.

Se $\nu \neq 0$, e tomando $a_1 = 0$ e $a_2 \to \infty$, temos

$$R_\nu = \frac{1}{(\mu+\nu)} R_0.$$

Note que o nível crítico de cobertura ν_c, ou seja, o valor mínimo necessário para a erradicação da doença, é dado por $\nu_c = \mu(R_0 - 1)$.

Mais que isto, sendo

$$\begin{aligned} G(a,s) &= \int_s^L \beta(a,a') e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \\ &= \int_s^L \beta e^{-(\mu+\gamma)a'} da \\ &= \frac{\beta e^{-(\mu+\gamma)s}}{(\mu+\gamma)} - \frac{\beta e^{-(\mu+\gamma)L}}{(\mu+\gamma)}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} e^{\gamma s} G(a,s) &= e^{\gamma s} \left(\frac{\beta e^{-(\mu+\gamma)s}}{(\mu+\gamma)} - \frac{\beta e^{-(\mu+\gamma)L}}{(\mu+\gamma)} \right) \\ &= \frac{\beta}{(\mu+\gamma)} \left[e^{-\mu s - \gamma s + \gamma s} - e^{-\mu L - \gamma L + \gamma s} \right] \\ &= \frac{\beta e^{-\mu s}}{(\mu+\gamma)} \left[1 - e^{-\gamma(L-s) - \mu(L-s)} \right] \\ &= \frac{\beta e^{-\mu s}}{(\mu+\gamma)} \left[1 - e^{-(\gamma+\mu)(L-s)} \right], \end{aligned}$$

que é uma função decrescente em s para todo $a \in [0, L]$. Segue do Teorema 12 (**Teorema de Unicidade**) que, se $R_\nu > 1$, temos uma única solução não-trivial da força de infecção que pode ser atingida pela seqüência recursiva

$$\lambda_n = T\lambda_{n-1},$$

onde qualquer aproximação inicial $\lambda_0 \in C[0,L]^+$, $\lambda_0 \neq 0$, pode ser escolhida.

Agora, desejando o esforço mínimo de vacinação necessário para erradicar a doença, ν^{th}, precisamos calcular o *infimum* do conjunto $\{\nu : R_\nu < 1\}$, ou seja,

$$\nu^{th} = \inf\{\nu : R_\nu < 1\}.$$

Esta condição pode ser aplicada à equação (3.8) tomando $R_\nu = 1$ e resolvendo a mesma em ν. Desta maneira obtemos ν^{th} sempre que ele existe.

3.2.2 Taxas de contato separáveis

Calculando $\mathbf{B}(a,\zeta)$ para

$$\beta(a,a') = f(a)\, g(a'), \tag{3.10}$$

temos

$$\mathbf{B}(a,\zeta) = \sigma X_b e^{-\int\limits_0^\zeta \nu(s)ds} \left\{ \int\limits_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int\limits_s^L g(a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} f(a).$$

Considerando asserções sobre as funções reais f e g definidas no intervalo real $[0,L]$, tais que as condições necessárias para o Teorema 6 (**Teorema de Existência**) se verifiquem, segue que o operador

$$T\lambda(a) = \int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{\int\limits_0^\zeta \lambda(s)ds} \lambda(\zeta)\, d\zeta$$

é positivo, completamente contínuo e sua derivada de Fréchet no ponto 0 na direção do cone $C[0,L]^+$ é dada por

$$T'(0)\,\lambda(a) = \int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\lambda(\zeta)\, d\zeta,$$

que é um operador linear, fortemente positivo e completamente contínuo.

Como no caso anterior, é suficiente calcular o único autovalor positivo de $T'(0)$ que é exatamente seu raio espectral.

Calculando $T'(0)\, f(a)$ temos

$$T'(0)\, f(a) = \left\{ \int_0^L \sigma X_b e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} \left\{ \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \left[\int_s^L g(a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} f(a)\, f(\zeta)\, d\zeta \right\}.$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$T'(0)\, f(a) = \eta_\nu f(a),$$

onde

$$\eta_\nu = \sigma X_b \int_0^L e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} \left\{ \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int_s^L g(a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Então

$$\begin{aligned} r(T'(0)) = & \left\{ \sigma X_b \int_0^L e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} \left\{ \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \times \right.\right. \\ & \left.\left. \left[\int_s^L g(a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} f(\zeta)\, d\zeta \right\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Usando a inequação (3.1) do Teorema 17 temos

$$\xi_\nu \inf_{a \in [0,L]} |f(a)| \leq r(T'(0) \leq \xi_\nu \sup_{a \in [0,L]} |f(a)| = \xi_\nu \|f\|,$$

onde

$$\xi_\nu = \sigma X_b \int_0^L e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} \left\{ \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int_s^L g(a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} d\zeta.$$

Calculando $\int\limits_0^L\int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\mathbf{B}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau$ obtemos

$$\int\limits_0^L\int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\mathbf{B}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau =$$
$$= f(a)\,\eta_\nu \sigma X_b \int\limits_0^L e^{-\int\limits_0^\zeta \nu(s)ds} \left\{ \int\limits_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int\limits_s^L g(a')\,e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} d\zeta,$$

donde

$$\frac{\int\limits_0^L\int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\mathbf{B}(\zeta,\tau)d\zeta d\tau}{\int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)d\zeta} =$$
$$= \frac{f(a)\eta_\nu \sigma X_b \int\limits_0^L e^{-\int\limits_0^\zeta \nu(s)ds} \left\{ \int\limits_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int\limits_s^L g(a')e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} d\zeta}{f(a)\sigma X_b \int\limits_0^L e^{-\int\limits_0^\zeta \nu(s)ds} \left\{ \int\limits_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int\limits_s^L g(a')e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} d\zeta}.$$

Segue da inequação (3.2) do Teorema 17 que

$$n_\nu \leq r\left(T'(0)\right) \leq n_\nu,$$

mais uma vez um valor exato para R_ν.

Particularmente, considerando $\nu \equiv 0$ temos o Número de Reprodutibilidade Basal, ou seja,

$$R_0 = \sigma X_b \int\limits_0^L \left\{ \int\limits_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int\limits_s^L g(a')\,e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{3.12}$$

Antes de verificarmos a unicidade da solução não-trivial usando o Teorema 12 (**Teorema de Unicidade**), analisemos a questão diretamente da equação (2.4), isto é,

$$\lambda(a) = \int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,e^{-\int\limits_0^\zeta \lambda(s)ds} \lambda(\zeta)\,d\zeta.$$

Neste caso temos que

$$\lambda(a) = \left\{ \sigma X_b \int_0^L e^{-\int_0^{\zeta}\lambda(s)ds} \lambda(\zeta)\, e^{-\int_0^{\zeta}\nu(s)ds} \times \right.$$

$$\left. \left\{ \int_{\zeta}^{L} e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int_s^L g(a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} d\zeta \right\} f(a).$$

Considerando

$$k = \sigma X_b \int_0^L e^{-\int_0^{\zeta}\lambda(s)ds} \lambda(\zeta)\, e^{-\int_0^{\zeta}\nu(s)ds} \left\{ \int_{\zeta}^{L} e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int_s^L g(a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} d\zeta,$$

temos que a solução tem a forma

$$\lambda(a) = kf(a).$$

Substituindo esta fórmula na equação (2.4) obtemos

$$kf(a) = \left\{ kf(a) \int_0^L \sigma X_b e^{-\int_0^{\zeta}\nu(s)ds} \left\{ \int_{\zeta}^{L} e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \left[\int_s^L g(a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} e^{-k\int_0^{\zeta} f(s)ds} f(\zeta)\, d\zeta \right\},$$

e assumindo $f(a)$ uma função estritamente positiva, e desde que procuramos $k \neq 0$, temos que k deve satisfazer a seguinte equação

$$\sigma X_b \int_0^L e^{-\int_0^{\zeta}\nu(s)ds} \left\{ \int_{\zeta}^{L} e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int_s^L g(a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} e^{-k\int_0^{\zeta} f(s)ds} f(\zeta)\, d\zeta = 1. \quad (3.13)$$

Definindo o lado esquerdo da equação (3.13) por $\mathcal{G}(k)$, ou seja,

$$\mathcal{G}(k) = \sigma X_b \int_0^L e^{-\int_0^{\zeta} \nu(s)ds} \left\{ \int_{\zeta}^{L} e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int_s^L g(a') \, e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} e^{-k\int_0^{\zeta} f(s)ds} f(\zeta)\, d\zeta,$$

temos que se $k = 0$ então $\mathcal{G}(k) = r(T'(0))$ e sendo $\mathcal{G}(k)$ uma função contínua e estritamente decrescente em k segue que se $r(T'(0)) > 1$ existe um único $k > 0$ tal que a equação (3.13) tem uma solução. Por outro lado, se $r(T'(0)) \leq 1$, a equação (3.13) não tem solução estritamente positiva.

Argumentos similares para a prova da unicidade no caso de funções separáveis podem ser encontrados em Greenhalgh [18] e Dietz e Schenzle [12].

Usando o Teorema 12 (**Teorema de Unicidade**), temos que, se

$$H(a,s) = f(a)\, e^{\gamma s} \int_s^L g(a') \, e^{-(u+\gamma)a'} da'$$

é uma função decrescente em s para todo a e $r(T'(0)) > 1$, então a solução não-trivial é única e pode ser atingida por uma seqüência recursiva do tipo

$$\lambda_n = T\lambda_{n-1},$$

onde qualquer aproximação inical $\lambda_0 \in C[0,L]^+$, $\lambda_0 \neq 0$, pode ser escolhida. Esta exigência sobre $H(a,s)$ estabelece condições sobre as funções $f(a)$ e $g(a')$. Por exemplo, é suficiente que $g(a')$ seja decrescente.

Entretanto, mesmo que a função $H(a,s)$ não seja decrescente em s para cada a, podemos ainda verificar se a equação (2.20) é positiva.

Primeiro exemplo: $\beta(a,a') = \beta e^{-c_1 a} e^{-c_2 a'}$

Calculamos o Número de Reprodutibilidade R_ν utilizando a equação (3.11). Substituindo

$$\beta(a,a') = \beta e^{-c_1 a} e^{-c_2 a'} \tag{3.14}$$

e a taxa de vacinação dada pela equação (3.6) na equação (3.11) segue que

$$R_\nu = \beta \sigma X_b \int_0^L e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} e^{(\sigma - c_1)\zeta} \left\{ \int_\zeta^L e^{(\gamma-\sigma)s} \left[\int_s^L e^{-(\mu+\gamma+c_2)a'} da' \right] ds \right\} d\zeta.$$

Resolvendo esta integração e tomando $L \to \infty$ obtemos

$$R_\nu = R_0 \left\{ 1 - \frac{\nu e^{-(\mu+c_1+c_2)a_1}}{(\mu+\nu+c_1+c_2)} \left[1 - e^{-(\mu+\nu+c_1+c_2)(a_2-a_1)} \right] \right\}$$

onde o Número de Reprodutibilidade Basal R_0 é dado por

$$R_0 = \frac{\beta \sigma X_b}{(\mu+c_1+c_2)(\mu+\gamma+c_2)(\mu+\sigma+c_2)}.$$

Se $c_1 = c_2 = 0$, ou seja, se a taxa de contato é constante igual a β, reobtemos

$$R_\nu = R_0 \left\{ 1 - \frac{\nu}{(\mu+\nu)} e^{-\mu a_1} \left[1 - e^{-(\mu+\nu)(a_2-a_1)} \right] \right\}$$

onde

$$R_0 = \frac{\beta \sigma X_b}{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}$$

é o Número de Reprodutibilidade Basal, que são as equações (3.8) e (3.9).

Se $\nu \neq 0$ e tomando $a_1 = 0$ e $a_2 \to \infty$ obtemos

$$R_\nu = \frac{(\mu+c_1+c_2)}{(\mu+\nu+c_1+c_2)} R_0.$$

Portanto, considerando a taxa de contato idade estruturada dada pela equação (3.14), para uma vacinação em todas as idades temos que o nível crítico de cobertura ν_c é agora dado por $\nu_c = (\mu + c_1 + c_2)(R_0 - 1)$.

Neste caso, decorre do Teorema 12 (**Teorema de Unicidade**) que, sendo $g(a') = e^{-c_2 a'}$ uma função decrescente em a', não só a solução não-trivial quando ocorre é única, como esta pode ser atingida recursivamente pela seqüência

$$\lambda_n = T\lambda_{n-1},$$

onde $\lambda_0 \neq 0, \lambda_0 \in C[0, L]^+$ pode ser tomado arbitrariamente.

Segundo exemplo: $\beta(a, a') = \beta e^{-c_1|a-a_1|}\ e^{-c_2|a'-a_2|}$

Substituindo

$$\beta(a, a') = \beta e^{-c_1|a-a_1|} e^{-c_2|a'-a_2|} \tag{3.15}$$

na equação (3.11) obtemos

$$R_\nu = \left\{ \beta\sigma X_b \int_0^L e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} e^{\sigma\zeta} e^{-c_1|\zeta-a_1|} \left\{ \int_\zeta^L e^{(\gamma-\sigma)s} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \left[\int_s^L e^{-c_2|a'-a_2|} e^{-(\mu+\gamma)a'} da' \right] ds \right\} d\zeta \right\}.$$

Considerando $\nu = 0$, $a_1 < a_2$ (no caso de $a_1 \geq a_2$ procedemos da mesma maneira) e θ a função de Heaviside, a última equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} R_0 = &\left\{ \beta\sigma X_b \int_0^L e^{\sigma\zeta} e^{-c_1|\zeta-a_1|} \left\{ \int_0^L e^{(\gamma-\sigma)s} \theta(s-\zeta) \times \right.\right. \\ &\left.\left. \left[\int_0^L e^{-c_2|a'-a_2|} e^{-(\mu+\gamma)a'} \theta(a'-s)\, da' \right] ds \right\} d\zeta \right\}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Resolvendo a equação (3.16) e tomando $L \to \infty$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{R_0}{\beta\sigma X_b} = &\frac{e^{-c_1a_1} e^{-c_2a_2}}{(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\sigma-c_2)(\mu-c_1-c_2)} \\ &-\frac{2c_2 e^{-c_1a_1} e^{-(\mu+\gamma)a_2}}{(\gamma-\sigma)(\gamma+c_1)(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\gamma+c_2)} \\ &+\frac{2c_2 e^{-c_1a_1} e^{-(\mu+\sigma)a_2}}{(\gamma-\sigma)(\sigma+c_1)(\mu+\sigma-c_2)(\mu+\sigma+c_2)} \\ &-\frac{2c_2 e^{-c_1(a_2a_1)} e^{-\mu a_2}}{(\sigma-c_1)(\gamma-c_1)(\mu+c_1-c_2)(\mu+c_1+c_2)} \\ &-\frac{2c_1 e^{-\mu a_1} e^{-c_2(a_2-a_1)}}{(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\sigma-c_2)(\mu+c_1-c_2)(\mu-c_1-c_2)} \end{aligned}$$

$$
-\frac{4c_1c_2e^{-\mu a_2}e^{-\gamma(a_2-a_1)}}{(\gamma-\sigma)(\gamma-c_1)(\gamma+c_1)(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\gamma+c_2)}
+\frac{4c_1c_2e^{-\mu a_2}e^{-\sigma(a_2-a_1)}}{(\gamma-\sigma)(\sigma-c_1)(\sigma+c_1)(\mu+\sigma-c_2)(\mu+\sigma+c_2)}.
$$

Se $c_1 = c_2 = 0$ então

$$
R_0 = \frac{\beta\sigma X_b}{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}
$$

e se $a_1 = a_2 = 0$ então

$$
R_0 = \frac{\beta\sigma X_b}{(\mu+\gamma+c_2)(\mu+\sigma+c_2)(\mu+c_1+c_2)},
$$

que são, respectivamente, os resultados de R_0 obtidos quando consideramos a taxa de contato constante, ou seja, $\beta(a,a') = \beta$, e $\beta(a,a') = \beta e^{-c_1 a}e^{-c_2 a'}$.

Neste caso, a questão da unicidade da solução não-trivial quando ela existe, ou seja, $r(T'(0)) > 1$, provém do fato de $\beta(a,a')$ ser uma função separável. A existência de uma função recursiva que convirja para a mesma fica então dependendo de condições sobre os parâmetros de modo que $H(a,s)$ seja uma função decrescente em s para todo a ou, que a equação (2.20) seja positiva.

Sendo $H(a,s)$ dada por

$$
H(a,s) = \begin{cases}
\left\{\frac{\beta e^{-c_1|a-a_1|}e^{c_2 a_2}}{(\mu+\gamma+c_2)}e^{\gamma s}\times\right. & \\
\left.\left[e^{-(\mu+\gamma+c_2)s} - e^{-(\mu+\gamma+c_2)L}\right]\right\} & \text{, se } a_2 \leq s \\
\beta e^{-c_1|a-a_1|}e^{\gamma s}\left\{-\frac{2c_2e^{-(\mu+\gamma)a_2}}{(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\gamma+c_2)}\right. & \\
\left.-\frac{e^{-(\mu+\gamma+c_2)L}e^{c_2 a_2}}{(\mu+\gamma+c_2)} + \frac{e^{-(\mu+\gamma-c_2)s}e^{-c_2 a_2}}{(\mu+\gamma-c_2)}\right\} & \text{, se } s \leq a_2
\end{cases}
$$

segue que $\frac{\partial H}{\partial s}(a,s)$ é igual a

$$\frac{\partial H}{\partial s}(a,s)=\begin{cases} -\frac{\beta e^{-c_1|a-a_1|}e^{c_2a_2}}{(\mu+\gamma+c_2)}e^{\gamma s}\left((\gamma+c_2)\,e^{-(\mu+\gamma+c_2)s}+\gamma e^{-(\mu+\gamma+c_2)L}\right) & \text{, se } a_2\le s\\ \beta e^{-c_1|a-a_1|}e^{\gamma s}\left\{-\frac{2\gamma c_2 e^{-(\mu+\gamma)a_2}}{(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\gamma+c_2)}-\frac{\gamma e^{c_2a_2}e^{-(\mu+\gamma+c_2)L}}{(\mu+\gamma+c_2)}\right. & \\ \left.-\frac{(\mu-c_2)e^{-c_2a_2}e^{-(\mu+\gamma-c_2)s}}{(\mu+\gamma-c_2)}\right\} & \text{, se } s\le a_2. \end{cases}$$

Portanto, é necessário que verifiquemos a relação entre os vários parâmetros envolvidos para verificar quando $H(a,s)$ é decrescente. Assim, temos que:

A) Se $a_2\le s$ então $\frac{\partial H}{\partial s}(a,s)<0$.

B) Se $s\le a_2$, os seguintes casos se verificam:

B1) Se $(\mu+\gamma-c_2)>0$ e $(\mu-c_2)>0$ então $\frac{\partial H}{\partial s}(a,s)<0$.

B2) Se $(\mu+\gamma-c_2)>0$ e $(\mu-c_2)<0$.

Das suposições anteriores segue que $\frac{2\gamma c_2}{(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\gamma+c_2)}>0$ e $\frac{(\mu-c_2)}{(\mu+\gamma-c_2)}<0$, e portanto, para que $\frac{\partial H}{\partial s}(a,s)<0$, devemos ter

$$-\frac{2\gamma c_2 e^{-(\mu+\gamma)a_2}}{(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\gamma+c_2)}-\frac{\gamma e^{c_2a_2}e^{-(\mu+\gamma+c_2)L}}{(\mu+\gamma+c_2)}<\frac{(\mu-c_2)\,e^{-c_2a_2}e^{-(\mu+\gamma-c_2)s}}{(\mu+\gamma-c_2)}<0,$$

ou seja,

$$\frac{2\gamma c_2 e^{-c_2a_2}e^{-(\mu+\gamma-c_2)a_2}}{(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\gamma+c_2)}+\frac{\gamma e^{c_2a_2}e^{-(\mu+\gamma+c_2)L}}{(\mu+\gamma+c_2)}>-\frac{(\mu-c_2)\,e^{-c_2a_2}e^{-(\mu+\gamma-c_2)s}}{(\mu+\gamma-c_2)}>0.$$

Como a pior possibilidade ocorre em $s=0$, então

$$\frac{2\gamma c_2 e^{-c_2a_2}e^{-(\mu+\gamma-c_2)a_2}}{(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\gamma+c_2)}+\frac{\gamma e^{c_2a_2}e^{-(\mu+\gamma+c_2)L}}{(\mu+\gamma+c_2)}>-\frac{(\mu-c_2)\,e^{-c_2a_2}}{(\mu+\gamma-c_2)}>0.$$

B3) Se $(\mu+\gamma-c_2)<0$.

Observe que neste caso temos que $\mu-c_2<-\gamma<0$. Segue então que $-\frac{2\gamma c c_2}{(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\gamma+c_2)}>0$ e

$-\frac{(\mu-c_2)}{(\mu+\gamma-c_2)} < 0$, e portanto, para que $\frac{\partial H}{\partial s}(a,s) < 0$, devemos ter

$$0 < -\frac{2\gamma c_2 e^{c_2 a_2} e^{-(\mu+\gamma+c_2)a_2}}{(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\gamma+c_2)} < \frac{\gamma e^{c_2 a_2} e^{-(\mu+\gamma+c_2)L}}{(\mu+\gamma+c_2)} + \frac{(\mu-c_2)\, e^{-c_2 a_2} e^{-(\mu+\gamma-c_2)s}}{(\mu+\gamma-c_2)}.$$

Novamente, a pior comparação ocorre em $s=0$, e portanto,

$$0 < -\frac{2\gamma c_2 e^{c_2 a_2} e^{-(\mu+\gamma+c_2)a_2}}{(\mu+\gamma-c_2)(\mu+\gamma+c_2)} < \frac{\gamma e^{c_2 a_2} e^{-(\mu+\gamma+c_2)L}}{(\mu+\gamma+c_2)} + \frac{(\mu-c_2)\, e^{-c_2 a_2}}{(\mu+\gamma-c_2)}.$$

A condição de ser $H(a,s)$ decrescente em s para todo a resulta nas considerações anteriores. Nos casos em que tal asserção não se verifica, resta a possibilidade de verificarmos a positividade da equação (2.20).

Sendo a equação (2.20) dada por

$$\left(\frac{d}{d\zeta}\int_0^\zeta \nu(s)\,ds\right) e^{\sigma\zeta}\int_\zeta^L e^{-s(\sigma-\gamma)}G(a,s)\,ds + e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta) - \sigma e^{\sigma\zeta}\int_\zeta^L e^{-s(\sigma-\gamma)}G(a,s)\,ds,$$

onde $G(a,s) = \int_s^L \beta(a,a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'}da'$, desde que $\nu \equiv 0$, temos que a equação anterior torna-se

$$e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta) - \sigma e^{\sigma\zeta}\int_\zeta^L e^{-s(\sigma-\gamma)}G(a,s)\,ds.$$

Como

$$\begin{aligned} -\sigma e^{\sigma\zeta}\int_\zeta^L e^{-s(\sigma-\gamma)}G(a,s)\,ds = \;& e^{\sigma\zeta}\left(e^{-\sigma L}e^{\gamma L}G(a,L) - e^{-\sigma\zeta}e^{\gamma\zeta}G(a,\zeta)\right) \\ & -e^{\sigma\zeta}\int_\zeta^L e^{-\sigma s}\tfrac{d}{ds}\left(e^{\gamma s}G(a,s)\right)ds, \end{aligned}$$

segue que a equação (2.20) passa a ser

$$-e^{\sigma\zeta}\int_\zeta^L e^{-\sigma s}\frac{d}{ds}\left(e^{\gamma s}G(a,s)\right)ds,$$

quando $\nu \equiv 0$. Como $H(a,s) = e^{\gamma s} G(a,s)$, ambas as condições, a Condição Forte sobre $H(a,s)$, ou seja, de $H(a,s)$ ser decrescente em s para cada a, e a Condição Fraca, de positividade da equação (2.20), são equivalentes.

3.2.3 Um caso onde o Teorema de Existência não é aplicável

Considerando a taxa de contato

$$\beta(a,a') = \beta\delta(a-a'), \tag{3.17}$$

onde δ é o Delta de Dirac, e $\nu = 0$, a equação (2.5) tem a forma

$$\mathbf{B}(a,\zeta) = \beta\sigma X_b e^{\sigma\zeta} \int_0^L e^{(\gamma-\sigma)s}\theta(s-\zeta)\left[\int_0^L \delta(a-a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'}\theta(a'-s)\, da'\right] ds,$$

onde θ é a função de Heaviside.

Fazendo $L \to \infty$ e resolvendo a equação acima, obtemos

$$\mathbf{B}(a,\zeta) = \begin{cases} \frac{\beta\sigma X_b}{(\gamma-\sigma)} e^{-\mu a}\left[e^{-\sigma(a-\zeta)} - e^{-\gamma(a-\zeta)}\right] & , \text{se } \zeta \leq a \\ 0 & , \text{se } a < \zeta \end{cases}.$$

Neste caso, a equação (2.4) é reescrita como

$$\lambda(a) = \int_0^a \mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int_0^\zeta \lambda(s)ds} \lambda(\zeta)\, d\zeta, \tag{3.18}$$

que é uma equação integral de Volterra homogênea não-linear do segundo tipo (Tricomi [37]).

É fácil ver que $\lambda \equiv 0$ é uma solução da equação (3.18). De fato, a solução trivial é sua única solução. Suponhamos λ^* uma solução não-negativa da equação (3.18). Então

$$|\lambda^*(a)| \leq \int_0^a \left|\mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int_0^\zeta \lambda(s)ds} \lambda^*(\zeta)\right| d\zeta.$$

Mas

$$\left|\mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int\limits_0^{\zeta}\lambda^*(s)ds}\lambda^*(\zeta)\right| =$$

$$= \left|\frac{\beta\sigma X_b}{(\gamma-\sigma)}e^{-\mu a}\left[e^{-\sigma(a-\zeta)} - e^{-\gamma(a-\zeta)}\right] e^{-\int\limits_0^{\zeta}\lambda^*(s)ds}\lambda^*(\zeta)\right|$$

$$= \frac{\beta\sigma X_b}{|\gamma-\sigma|}\left|e^{-\mu a}\left[e^{-\sigma(a-\zeta)} - e^{-\gamma(a-\zeta)}\right] e^{-\int\limits_0^{\zeta}\lambda^*(s)ds}\lambda^*(\zeta)\right|,$$

ou seja,

$$\left|\mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int\limits_0^{\zeta}\lambda^*(s)ds}\lambda^*(\zeta)\right| =$$

$$= \begin{cases} \frac{\beta\sigma X_b}{|\gamma-\sigma|}\left|e^{-\mu a}e^{-\sigma(a-\zeta)}\left[1 - e^{-(\gamma-\sigma)(a-\zeta)}\right] e^{-\int\limits_0^{\zeta}\lambda^*(s)ds}\lambda^*(\zeta)\right| & \text{, se } \gamma > \sigma \\ \frac{\beta\sigma X_b}{|\gamma-\sigma|}\left|e^{-\mu a}e^{-\gamma(a-\zeta)}\left[e^{-(\sigma-\gamma)(a-\zeta)} - 1\right] e^{-\int\limits_0^{\zeta}\lambda^*(s)ds}\lambda^*(\zeta)\right| & \text{, se } \gamma < \sigma. \end{cases}$$

Então, em ambos os casos, temos

$$\left|\mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int\limits_0^{\zeta}\lambda^*(s)ds}\lambda^*(\zeta)\right| \leq K\left|\lambda^*(\zeta)\right|,$$

onde $K = \frac{\beta\sigma X_b}{|\gamma-\sigma|}$.

Assim

$$|\lambda^*(a)| \leq \int\limits_0^a K\left|\lambda^*(\zeta)\right| d\zeta \leq K\left\|\lambda^*\right\| a.$$

Segue então que

$$|\lambda^*(a)| \leq \int_0^a K|\lambda^*(\zeta)|\,d\zeta \leq \int_0^a K^2\|\lambda^*\|\,\zeta d\zeta = K^2\|\lambda^*\|\frac{a^2}{2}.$$

É possível mostrar, usando indução sobre n, que

$$|\lambda^*(a)| \leq K^n\|\lambda^*\|\frac{a^n}{n!}.$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ obtemos $\lambda^* \equiv 0$, e portanto a única solução da equação (2.4) é a trivial.

Note que, o significado biológico da única solução possível, considerada a taxa de contato dada pela equação (3.17), ser a solução nula, traduz o fato de que se uma doença se propaga preferencialmente entre indivíduos da mesma idade, então ela não será capaz de se disseminar numa população.

3.2.4 Uma taxa de contato geral

Considerando uma taxa de contato do tipo

$$\beta(a,a') = \beta e^{-c|a-a'|}, \tag{3.19}$$

onde a função $\beta(a,a')$ é tal que as asserções do Teorema 6 (**Teorema da Existência**) são satisfeitas, segue que o Número de Reprodutibilidade é o raio espectral do operador linear, fortemente positivo e completamente contínuo $T'(0)$ que é dado pela equação (2.10), ou seja,

$$T'(0)\,u(a) = \int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,u(\zeta)\,d\zeta,$$

com núcleo

$$\mathbf{B}(a,\zeta) = \sigma X_b e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s}\left[\int_s^L \beta(a,a')\,e^{-(\mu+\gamma)a'}da'\right] ds.$$

Tomando $\nu \equiv 0$ e $\beta(a,a')$ dado pela equação (3.19) e substituindo ambos na equação de $\mathbf{B}(a,\zeta)$ temos que

$$\mathbf{B}(a,\zeta)=\begin{cases}\beta\sigma X_b e^{-\mu\zeta}e^{-c(\zeta-a)}\left\{\frac{1}{(\mu+\gamma+c)(\mu+\sigma+c)}+\frac{e^{-(\mu+\sigma+c)(L-\zeta)}}{(\gamma-\sigma)}\times\right.\\ \left.\left[-\frac{1}{(\mu+\sigma+c)}+\frac{e^{-(\gamma-\sigma)(L-\zeta)}}{(\mu+\gamma+c)}\right]\right\},\text{ se } a\leq\zeta\\ \beta\sigma X_b e^{-\mu\zeta}\left\{\frac{2ce^{-(\mu+\sigma)(a-\zeta)}}{(\gamma-\sigma)}\left[-\frac{1}{(\mu+\sigma+c)(\mu+\sigma-c)}+\frac{e^{-(\gamma-\sigma)(a-\zeta)}}{(\mu+\gamma+c)(\mu+\gamma-c)}\right]\right.\\ \left.+\frac{e^{-c(L-a)}e^{-(\mu+\sigma)(L-\zeta)}}{(\gamma-\sigma)}\left[-\frac{1}{(\mu+\gamma+c)}+\frac{e^{-(\gamma-\sigma)(L-\zeta)}}{(\mu+\gamma+c)}\right]+\frac{e^{-c(a-\zeta)}}{(\mu+\gamma-c)(\mu+\sigma-c)}\right\},\text{ se } \zeta\leq a.\end{cases}$$

Não sendo possível encontrar uma expressão analítica para o raio espectral de $T'(0)$ podemos estimá-lo através da inequação (3.1) do Teorema 17.

Calculando $\int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta$ quando $L\to\infty$ obtemos

$$\int_0^\infty \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta = \beta\sigma X_b\left\{\frac{e^{-ca}}{(\mu-c)(\mu+\gamma-c)(\mu+\sigma-c)}+2ce^{-\mu a}\left[-\frac{1}{\gamma\sigma(\mu+c)(\mu-c)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{e^{-\sigma a}}{(\gamma-\sigma)}\left[\frac{1}{\sigma(\mu+\sigma+c)(\mu+\sigma-c)}-\frac{e^{-(\gamma-\sigma)a}}{\gamma(\mu+\gamma+c)(\mu+\gamma-c)}\right]\right]\right\}.$$

Se $c=0$ temos que

$$\int_0^\infty \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta=\frac{\beta\sigma X_b}{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}$$

que é o Número de Reprodutibilidade Basal quando a taxa de contato é considerada constante igual a β.

Se $a=0$ temos

$$\int_0^\infty \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta=\frac{\beta\sigma X_b}{(\mu+c)(\mu+\gamma+c)(\mu+\sigma+c)}$$

e se $a\to\infty$ então $\int_0^\infty \mathbf{B}(a,\zeta)\,d\zeta\to 0$.

Analisando a questão da unicidade pelo Teorema 12 (**Teorema de Unicidade**) devemos estudar o comportamento de $H(a,s)=e^{\gamma s}\int_s^L \beta(a,a')\,e^{-(\mu+\gamma)s}ds$. $H(a,s)$ será decrescente em

s para cada a dependendo das relações entre os parâmetros c, μ e γ. Substituindo a equação (3.19) na equação de $H(a,s)$ obtemos

$$H(a,s) = \begin{cases} \frac{\beta e^{ca}}{(\mu+\gamma+c)} e^{\gamma s}\left[e^{-(\mu+\gamma+c)s} - e^{-(\mu+\gamma+c)L}\right] & ,\text{se } a \leq s \\ \beta e^{\gamma s}\left\{-\frac{2ce^{-(\mu+\gamma)a}}{(\mu+\gamma-c)(\mu+\gamma+c)} - \frac{e^{-(\mu+\gamma+c)L}e^{ca}}{(\mu+\gamma+c)}\right. & \\ \left. + \frac{e^{-(\mu+\gamma-c)s}e^{-ca}}{(\mu+\gamma-c)}\right\} & ,\text{se } s \leq a. \end{cases}$$

Observe que esta equação é a mesma que obtemos para $H(a,s)$ quando consideramos $\beta(a,a') = \beta e^{-c_1|a-a_1|}e^{-c_2|a'-a_2|}$ e tomamos $c_1 = 0$, $a_2 = a$ e $c_2 = c$ e portanto, as mesmas considerações que as feitas no caso anteriormente estudado são válidas.

Uma outra alternativa seria determinar uma seqüência recursiva que convergisse para alguma solução não-trivial de $T\lambda = \lambda$, mesmo que não possamos afirmar nada quanto a unicidade. Iremos então determinar operadores que limitam T superior e inferiormente e sejam, eles próprios, operadores monótonos, onde obviamente as afirmações anteriores, quanto à unicidade e existência de seqüências recursivas convirgindo para a solução não-trivial, são válidas.

Considerando a taxa de contato

$$\widetilde{\beta}(a,a') = \beta e^{-c(a'-a)}, \tag{3.20}$$

seja $\widetilde{T}$ o operador da equação (2.12) obtido a partir da função $\widetilde{\beta}(a,a')$. Temos então que $\widetilde{T}$ é um operador positivo e completamente contínuo, com derivada forte de Fréchet em 0 na direção do cone $C[0,L]^+$ dada por

$$\widetilde{T}'(0)\,u(a) = \int_0^L \widetilde{\mathbf{B}}(a,\zeta)\,u(\zeta)\,d\zeta,$$

onde $\widetilde{\mathbf{B}}(a,\zeta)$ é obtido da equação (2.5) substituindo $\beta(a,a')$ por $\widetilde{\beta}(a,a')$. $\widetilde{T}'(0)$ é linear, fortemente positivo e completamente contínuo. Além disto, é de fácil verificação que $T'(0) \leq \widetilde{T}'(0)$ uma vez que $\beta(a,a') \leq \widetilde{\beta}(a,a')$. Segue do Teorema 5 (iii) que $r(T'(0)) \leq r\left(\widetilde{T}'(0)\right)$.

Sendo $H(a,s) = e^{\gamma s}\int_s^L \widetilde{\beta}(a,a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'}da'$ uma função decrescente em s para cada a, se $1 < r(T'(0))$ então segue, de $1 < r(T'(0)) \leq r\left(\widetilde{T}'(0)\right)$ e do Teorema 12 (**Teorema de Unicidade**), que $\widetilde{T}$ tem uma única solução não-trivial que por ser atingida recursivamente pela seqüência

$$\begin{cases} \widetilde{\lambda_0} = \lambda_0 \\ \widetilde{\lambda_n} = \widetilde{T}\left(\widetilde{\lambda_{n-1}}\right), \end{cases}$$

independente da escolha da aproximação inicial $\lambda_0 \in C[0,L]^+, \lambda_0 \neq 0$.

Sendo $T \leq \widetilde{T}$ e $\widetilde{T}$ é um operador monótono, ao considerarmos a seqüência positiva

$$\begin{cases} \lambda_0 \\ \lambda_n = T\lambda_{n-1}, \end{cases}$$

temos que $\lambda_1 = T\lambda_0 \leq \widetilde{T}\lambda_0 = \widetilde{\lambda_1}$. Supondo então que a desigualdade $\lambda_{n-1} \leq \widetilde{\lambda_{n-1}}$ seja válida para n um inteiro positivo qualquer, segue que

$$\lambda_n = T\lambda_{n-1} \leq \widetilde{T}\lambda_{n-1} \leq \widetilde{T}\widetilde{\lambda_{n-1}} = \widetilde{\lambda_n},$$

ou seja, a seqüência (λ_n) é limitada superiormente pela seqüência $\left(\widetilde{\lambda_n}\right)$ que é uma seqüência convergente e portanto, ela própria limitada. Portanto (λ_n) é limitada. Sendo T um operador compacto e $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} = (T\lambda_{n-1})_{n=0}^{\infty}$ temos que (λ_n) possui uma subseqüência convergente, digamos, (λ_{n_k}). Se $\lambda^* = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{n_k}$ segue que

$$\lambda^* = \lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k} = \lim_{k\to\infty} T\lambda_{n_{k-1}} = T\left(\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_{k-1}}\right) = T\lambda^*,$$

ou seja, λ^* é uma solução de $T\lambda = \lambda$.

Uma vez que T e $\widetilde{T}$ são ambos u_0-limitados, $u_0 \equiv 1$, temos que existem α_1, β_1, α_2 e β_2 números positivos tais que para todo $x \in C[0,L]^+$, $x \neq 0$, são válidas as desigualdades

$$\alpha_1 u_0 \leq Tx \leq \beta_1 u_0$$

e

$$\alpha_2 u_0 \leq \widetilde{T}x \leq \beta_2 u_0.$$

Assim, é possível encontrar $0 < \alpha < 1$ tal que

$$\alpha\widetilde{T} \leq T.$$

Portanto $\alpha\widetilde{\lambda_1} = \left(\alpha\widetilde{T}\right)\lambda_0 \leq T\lambda_0 = \lambda_1$. Suponhamos válida a inequação $\alpha\widetilde{\lambda_{n-1}} \leq \lambda_{n-1}$ para n um inteiro positivo qualquer. Desde que $\widetilde{T}$ é côncavo e monótono e, $0 < \alpha < 1$, segue que,

$$\alpha\widetilde{\lambda_n} = \alpha\widetilde{T}\widetilde{\lambda_{n-1}} \leq \widetilde{T}\left(\alpha\widetilde{\lambda_{n-1}}\right) \leq \widetilde{T}\lambda_{n-1} \leq T\lambda_{n-1} = \lambda_n.$$

Como a seqüência $\left(\widetilde{\lambda_n}\right)$ converge para a solução não-trivial de $\widetilde{T}\lambda = \lambda$, temos que λ^* é também não-trivial e além disso,

$$\alpha\widetilde{\lambda} \leq \lambda^* \leq \widetilde{\lambda},$$

onde $\widetilde{\lambda}$ é a única solução não-trivial de $\widetilde{T}\lambda = \lambda$.

Sendo assim, determinamos uma seqüência que converge para uma solução não-trivial de $T\lambda = \lambda$.

CONCLUSÃO

O principal objetivo deste trabalho é estabelecer condições para que a equação integral

$$\lambda(a) = \int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int_0^{\zeta} \lambda(\zeta) d\zeta} \lambda(\zeta)\, d\zeta$$

tenha uma solução não-trivial. Para uma taxa de contato idade dependente, $\beta(a, a') \in C[0, L]$, positiva a menos de $\beta(0,0)$, onde pode ser igual a zero, e uma taxa de vacinação, também idade dependente, $\nu(a)$, contínua ou contínua por partes com no máximo um número finito de descontinuidades, e limitada, o Teorema 5 (**Teorema de Existência),** desenvolvido no Capítulo 1, estabelece que se o raio espectral do operador integral sobre espaço de Banach $C[0, L]$, com cone $C[0, L]^+$, o qual é dado pela equação

$$T'(0)\,\lambda(a) = \int_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\,\lambda(\zeta)\, d\zeta,$$

é maior que 1 então existe pelo menos uma solução não-trivial. Caso contrário, ou seja, se o raio espectral é menor ou igual a 1, então a única solução possível é a trivial. Portanto, mais que caracterizar R_0, o resultado se aplica à avaliação de programas de vacinação, uma vez que para cada $\nu(a)$ temos caracterizado o valor R_ν $(\leq R_0)$.

Tratamos também a questão da unicidade. O Teorema 12 (**Teorema de Unicidade**) estabelece a unicidade da solução não-trivial e uma seqüência recursiva que converge para a mesma, assumindo que o raio espectral de $T'(0)$ é maior que um e que a função $H(a,s)$ é decrescente em s para todo a. Vemos ainda que a condição sobre $H(a,s)$ pode ser substituida pela condição que a equação (2.20) seja positiva, uma vez que as equações (2.17) e (2.18) são sempre positiva e estritamente positiva, respectivamente. Ambas as condições implicam que a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{B}(a,s)$ é menor que zero e, portanto, o operador $\mathbf{T}$ é u_0-monótono.

A estabilidade local da solução trivial, resultado estabelecido no Teorema 14 (**Teorema de Estabilidade**), também é caracterizada por condições sobre o raio espectral do operador $T'(0)$. Se $r(T'(0)) \leq 1$ a solução trivial é localmente estável e, caso contrário, ou seja, se $r(T'(0)) > 1$, então a solução trivial é localmente instável.

Finalmente, devido a dificuldade que geralmente é encontrada no cálculo do raio espectal, no Teorema 17 estabelecemos limites superior e inferior para R_0. Os limites se comportam de maneira bem conveniente na análise de casos clássicos (taxas de contato constante e separável). No mesmo capítulo 3, trabalhamos alguns exemplos para diferentes taxas de contato idade dependente.

Para a obtenção dos resultados acima descritos, foram utilizados resultados do tipo Ponto Fixo e de operadores monótonos, encontrados em Krasnosels'kii [26] [27], além de propriedades de operadores positivos e fortemente positivos sobre cones, encontrados em Deimling [10].

Outros dois trabalhos, Greenhalgh [19] e Lopez e Coutinho [30], também usando uma taxa de contato idade dependente como sendo uma função pertencente a $C[0,L]$, caracterizaram o Número de Reprodutibilidade como o raio espectral de um operador integral..

Greenhalgh [19] faz a exigência que a taxa de contato seja estritamente positiva (página 651, linha -12), o que não é necessário em nosso caso. Lopez e Coutinho [30] usam em sua demonstração o Teorema de Schauder. O Teorema de Schauder exige que a aplicação aja em um conjunto convexo. A definição de convexo dada por Griffell [17], página 145, geometricamente tem o seguinte significado: um conjunto convexo deve conter qualquer segmento de reta unindo quaisquer dois pontos pertencentes a ele. Considerando, por questão de simplificação dos cálculos, $L = 1$, temos que é fácil ver que o conjunto $T = C[0,L]^+ \cap \{\varphi; \|\varphi\| = 1\}$ não é convexo, bastando considerar as funções $x(a) = a$, $y(a) = 4a(1-a)$ pertencentes a T e $z(a) = \frac{1}{2}x(a) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)y(a)$. A norma de z é igual a $\frac{50}{64}$, ou seja, $\|z\| = \frac{50}{64}$, e portanto z não pertence a T apesar de pertencer ao segmento de reta que une pontos de T, a saber, x e y. Lembremos que o Teorema de Schauder é um resultado que estabelece a existência de um ponto fixo para um operador contínuo agindo num conjunto fechado e convexo cuja imagem, pelo operador, está contida em um subconjunto relativamente compacto do domínio de definição.

Ao considerarmos o conjunto $C\,[0,L]^{+} \cap \{\varphi; \|\varphi\| \leq 1\}$, este sim um conjunto convexo, abrimos a possibilidade que a função nula seja o ponto fixo obtido na resposta do Teorema de Schauder, uma vez que para o operador considerado, a imagem da função nula é a própria função nula.

A questão da estabilidade da solução trivial não é enfocada por Lopez e Coutinho [30], mas somente por Greenhalgh [19]. Greenhalgh utiliza a caracterização de R_0 como raio espectral para estabelecer condições de estabilidade. Como a caracterização exige que a taxa de contato seja estritamente positiva, os resultados acerca da estabilidade também estão condicionados a tal exigência, o que, como já havíamos dito, não é exigido em nosso caso.

Quanto a questão da unicidade da solução não-trivial, esta não é abordada por Greenhalgh [19], mas somente por Inaba [23] e Lopez e Coutinho [30]. Inaba considera um modelo SIR e não leva em conta qualquer esquema de vacinação, estabelecendo condições para a monoticidade do operador integral. Lopez e Coutinho não exigem a monoticidade do operador integral e baseiam seu resultado em outros dois. O primeiro deles estabelece um intervalo que contém o espectro do operador integral (veja seção 4) usando o Teorema de Schauder agindo sobre conjunto $T = C\,[0,L]^{+} \cap \{\varphi; \|\varphi\| = r\}$. O segundo resultado diz respeito ao uso de um teorema de Krasnosel'skii [27], página 159, Teorema 5.4. No mencionado teorema é necessário que ao único autovalor de $\mathbf{B}'_{\infty}$ corresponda um único autovetor. O único autovalor de $\mathbf{B}'_{\infty}$ é 0 e seu correspondente autoespaço é $C\,[0,L]$.

Ainda um breve comentário aos resultados obtidos por Lopez e Coutinho, quando generalizam os resultados obtidos para um núcleo positivo para um núcleo não-negativo (seção 6, subseção 6.1), observamos que o conjunto das funções positivas, em que ser positiva, para os autores, significa ter somente um número finito de pontos onde a função se anula, acrescido da função nula não é um cone. Um cone, em particular, deve ser um conjunto fechado. Tomando novamente $L = 1$ pela mesma razão exposta anteriormente, e considerando a seguinte seqüência

$$f_n(a) = \begin{cases} \frac{1}{n}\left[sen\,(4n\pi a) + 1\right] & ,0 \leq a \leq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{2(n-1)}{n}\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n} & ,\frac{1}{2} \leq a \leq 1, \end{cases}$$

que pertence ao conjunto acima descrito, temos que esta converge para a função

$$f(a) = \begin{cases} 0 & ,0 \leq a \leq \frac{1}{2} \\ \\ 2\left(a - \frac{1}{2}\right) & ,\frac{1}{2} \leq a \leq 1, \end{cases}$$

que não pertence ao conjunto mencionado.

Olhando os resultados estabelecidos no trabalho do ponto de vista epidemiológico, temos que:

I) Obter condições para que a equação integral $\lambda(a) = \int\limits_0^L \mathbf{B}(a,\zeta)\, e^{-\int\limits_0^\zeta \lambda(\zeta)d\zeta} \lambda(\zeta)\, d\zeta$ tenha solução distinta da trivial é equivalente a estabelecer condições para que uma dada doença seja capaz de invadir e se estabelecer em uma certa comunidade, uma vez que, neste caso, $\lambda(a)$ representa a força de infecção, parâmetro epidemiológico definido como a taxa de incidência *per capita.*

II) A caracterização de R_ν como o raio espectral de um operador permite que possamos avaliar resultados de um determinado programa de vacinação que tenha como objetivo a erradicação de uma doença. Considerando, por exemplo, o programa de vacinação dado por $\nu(a) = \nu\theta(a - a_1)\,\theta(a_2 - a)$, onde ν é a taxa de vacinação e $[a_1, a_2]$ o intervalo etário onde a vacinação será feita, podemos: (i) saber se este programa é eficiente, ou seja, se $R_\nu \leq 1$, uma vez que teremos, neste caso, $\lambda \equiv 0$; (ii) determinar o esforço mínimo de vacinação, ou seja, o menor valor de ν tal que $R_\nu = 1$; (iii) determinar intervalos etários $[a_1, a_2]$ convenientes para o controle da doença.

III) A estabilidade da solução trivial é equivalente a que a ocorrência de um pequeno número de casos não implicará no alastramento da doença na forma de um surto epidêmico.

IV) Finalmente, a questão da unicidade tem primordialmente um significado numérico. A força de infecção é passível de alterações por meio de intervenções na população (por exemplo, quimioterapias, campanhas de vacinação, etc.) e, assim, a obtenção de λ é interessante quando a partir dela é possível obter a taxa de contato, $\beta(a, a')$, este sim um parâmetro que caracteriza o padrão de comportamento da doença na comunidade em questão. Quando temos não só a unicidade mas também uma maneira de obter λ, no nosso caso, via uma seqüência recursiva, podemos, ao estudar o caso de uma população em equilibrio em relação ao tempo e que não recebeu qualquer intervenção de controle relativamente a doença, calcular os vários parâmentros envolvidos na taxa de contato.

Bibliografia

[1] Anderson, R. M. and May, R. M., Directly transmitted infections diseases: control and vaccination, **Science 215**: 1053-1060 (1982).

[2] Anderson, R. M. and May, R. M., **Infections Diseases of Humans: Dynamics and Control**, Oxford University Press, New York, 1992.

[3] Anderson, R. M. and May, R. M., Age-related changes in the rate of disease transmission: implications for the design of vaccination programmes, **J. Hyg. Camb. 94 (3):** 365-436 (1985).

[4] Azevedo Neto, R. S. *et al.,* Rubella seroepidemiology in a non-immunized population of São Paulo State, Brazil, **Epidemiol. Infect. 113(1)**: 161-173 (1994).

[5] Bailey, N. J. T., **The Mathematical Theory of Infections Diseases and its Application.,** Griffin, London, 1975.

[6] Bartle, R. G., **The Elements of Integration,** John Wiley & Sons, New York, 1966.

[7] Bartle, R. G., **The Elements of Real Analysis, second edition,** John Wiley & Sons, New York, 1976.

[8] Bernoulli, D., Essai dúne nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérolo et des advantages de línoculation pour la prévenir, **Mém. Math. Phys. Acad. Roy. Sci**: 1-45 (1760).

[9] Collins, S. D., Age incidence of the commom communicable diseases of children, **U.S. Public Health Rep. 44:** 763-829 (1929).

[10] Deimling, K., **Nonlinear Functional Analysis,** Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[11] Dietz, K., Transmission and control of arbovirus disease, in: **Proceeding of a SIMS Conference on Epidemiology, Alta, Utah, July 8-12:** 104-121 (1974).

[12] Dietz, K. and Schenzle, D., Proportionate mixing for age-dependente infection transmissions, **J. Math. Biol. 22**: 117-120 (1985).

[13] Dunford, N. and Schwartz, J. T., **Linear Operators Part I: General Theory,** John Wiley & Sons, New York, 1957.

[14] Farr, W., Progress of epidemics, **Second report of the Registar General of England:** 91-98 (1840).

[15] Fine, P. E. M. and Clarkson, J. A., Measles in England and Wales I. An analysis of factors underlying seasonal patterns, **Int. J. Epidemiol. 11**: 5-14 (1982).

[16] Fine, P. E. M. and Clarkson, J. A., Measles in England and Wales II. The impact of the measles vaccination program on the distribuition of immunity in the population, **Int. J. Epidemiol. 11**: 15-25 (1982).

[17] Griffell, D. H., **Applied Functional Analysis,** Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 1981.

[18] Greenhalgh, D., Vaccination campaigns for common childhood diseases, **Math. Biosc. 100:** 201-240 (1990).

[19] Greenhalgh, D. H., Existence, threshold and stability results for an age-structured epidemic model with vaccination and a non-separable transmission coefficient, **Int. J. Systems Sci., vol.24, n0.4:** 641-668 (1993).

[20] Griffiths, D. A., A catalytic model of infection for measles, **Appl. Stat. 23:** 330-339 (1974).

[21] Hamer, W. H., Epidemic disease in England, **The Lancet,** i: 733-739 (1906).

[22] Hoppenstead, R., An age dependent epidemic model, **J. Franklin Inst. 297**: 325-333 (1974).

[23] Inaba, H., Threshold and stability results for an age-structured epidemic model, **J. Math. Biol. 28**: 411-434 (1990).

[24] Kermack, W. O. and McKendrick, A. G., A contribuition to the mathematical theory of epidemics, **Proc. R. Soc., A 115**: 700-721 (1927).

[25] Knolle, H., The general age-dependente endemic with age-specific contact rate, **Biometrical J. 25**: 469-475 (1983).

[26] Krasnosel'skii, M. A., Vainikko, G.M., Zabreyko, P.P., Rutitskii, Ya.B., Stetsenko, V.Ya., **Approximate Solution of Operator Equations**, Wolters-Noordhoff Publising, Groningen, The Netherlands, 1972.

[27] Krasnosel'skii, M. A., **Positive Solutions of Operator Equations,** P. Noorddhoff ltda. Groningen, The Netherlands, 1964.

[28] Krasnosel'skii, M. A., **Topological Method in the Theory of Nonlinear Integral Equation,** Pergamon Press, Oxford, 1964.

[29] Kreyszig, E., **Introductory Functional Analysis with Applications,** John Wiley & Sons, New York, 1989.

[30] Lopez, L. F., and Coutinho, F. A. B., On the uniqueness of the positive solution of an integral equation wich appears in epidemiological models, **J. Math. Biol.,** aceito.

[31] London, W. P. and Yorke, J. A., Recurrent outbreaks of measles, chickenpox and mumps I: seasonal variation in contact rate, **Am. J. Epidemiol. 98:** 453-468 (1973).

[32] Ross, R., **The prevention of malaria (2nd. edn.)**, Murray, London, 1911.

[33] Ross, R., Some *a priori* pathometric equations. **Br. Med. J., 1:** 546-547 (1915).

[34] Ross, R., An application of the theory of probabilities to the study of *a priori* pathometry, I, **Proc. R. Soc., A92**: 204-230 (1916).

[35] Ross, R., An application of the theory of probabilities to the study of *a priori* pathometry, II, **Proc. R. Soc., A93**: 212-225 (1917).

[36] Schenzle, D., An age-structure model of pre- and post-vaccination measles transmission, **IMA J. Math. Appl. Med. Biol. 1**:169-191 (1984).

[37] Tricomi, F. G., **Integral equations,** Dover Publications, Inc., New York, 1985.

[38] Zabreyko, P. P., Koshelev, A. I., Krasnosel'skii, M. A, Mikhlin, S. G., Rakovshchik, L. S. and Stet'senko, V. Y., **Integral equations - a reference text**, Noordhoff International Publishing Leyden, The Netherlands, 1975.

[39] Yang, H. M., Directly transmitted infections modeling considering an age-structured contact rate - Epidemiologycal analysis, **Mathl. Comp. Mod. 29** (7): 11-30 (1999).

[40] Yang, H. M., Directly transmitted infections modeling considering an age-structured contact rate, **Mathl. Comp. Mod. 29** (8): 39-48 (1999).

[41] Yang, H. M., Impacto da vacinação nas infecções de transmissão direta - Epidemiologia através de modelo matemático, **Tese de Livre-docência**, IMECC-UNICAMP, Campinas, São Paulo, 1997.

APÊNDICE

Sobre $r\left(S\left(\omega\right)\right) \to 0$ quando $\omega \to +\infty$

Seja $S\left(\omega\right) = \left(S_{ij}\left(\omega\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ uma matriz com $S_{ij}\left(\omega\right) = \sup\limits_{a_{i-1}\leq a\leq a_i} \int\limits_{a_{j-1}}^{a_j} S\left(a,\zeta,\nu\left(\zeta\right),\omega\right) d\zeta$ e, $S\left(a,\zeta,\nu\left(\zeta\right),\omega\right)$ dado pela equação (2.33), ou seja,

$$S\left(a,\zeta,\nu\left(\zeta\right),\omega\right) = e^{-\int\limits_0^\zeta \nu(s)ds} \int\limits_\zeta^L \left[\int\limits_b^L \sigma X_b \beta\left(a,a'\right) e^{-\mu a'} e^{-\omega(a'-\zeta)} e^{-\gamma(a'-b)} da'\right] e^{-\sigma(b-\zeta)} db.$$

Se $\omega_1 \leq \omega_2$ então $S\left(a,\zeta,\nu\left(\zeta\right),\omega_1\right) \geq S\left(a,\zeta,\nu\left(\zeta\right),\omega_2\right)$ e portanto

$$\int\limits_{a_{j-1}}^{aj} S\left(a,\zeta,\nu\left(\zeta\right),\omega_1\right) d\zeta \geq \int\limits_{a_{j-1}}^{aj} S\left(a,\zeta,\nu\left(\zeta\right),\omega_2\right) d\zeta.$$

Observe que para cada j, $j = 1,...,n$, a função $a \in [a_{i-1},a_i] \longmapsto \int\limits_{a_{j-1}}^{aj} S\left(a,\zeta,\nu\left(\zeta\right),\omega\right) d\zeta$ é contínua em a, para todo $i = 1,...n$. Sendo $[a_{i-1},a_i]$ um compacto, existe $a^* \in [a_{i-1},a_i]$ tal que

$$\sup_{a_{i-1}\leq a\leq a_i} \int\limits_{a_{j-1}}^{a_j} S\left(a,\zeta,\nu\left(\zeta\right),\omega_2\right) d\zeta = \int\limits_{a_{j-1}}^{a_j} S\left(a^*,\zeta,\nu\left(\zeta\right),\omega_2\right) d\zeta.$$

Assim

$$\begin{aligned}
S_{ij}(\omega_2) &= \sup_{a_{i-1}\leq a\leq a_i} \int_{a_{j-1}}^{a_j} S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega_2)\,d\zeta \\
&= \int_{a_{j-1}}^{a_j} S(a^*,\zeta,\nu(\zeta),\omega_2)\,d\zeta \\
&\leq \int_{a_{j-1}}^{a_j} S(a^*,\zeta,\nu(\zeta),\omega_1)\,d\zeta \\
&\leq \sup_{a_{i-1}\leq a\leq a_i} \int_{a_{j-1}}^{a_j} S(a,\zeta,\nu(\zeta),\omega_1)\,d\zeta \\
&= S_{ij}(\omega_1),
\end{aligned}$$

e portanto $S(\omega_1) \geq S(\omega_2)$.

Considerando, no Teorema 5 (iii), $A = S(\omega_2)$ e $S = S(\omega_1)$, segue que $r(S(\omega_2)) \leq r(S(\omega_1))$, ou seja, $r(S(\omega))$ é função monótona decrescente em ω. Particularmente, se $\omega_1 < \omega_2$ então $r(S(\omega_2)) < r(S(\omega_1))$. Mais que isto, temos que $S(\omega) = (S_{ij}(\omega)) \to 0$ quando $\omega \to +\infty$.

Definição: *Uma matriz $A_{n\times n}$ is* ***irredutível*** *se não existe uma matriz permutação P (uma* ***matriz permutação*** *é uma matriz quadrada tal que $Pe_i = e_j$, com $i \to j$ uma permutação de $\{1,...,n\}$ e $\{e_1,...,e_n\}$ a base natural de $\mathbf{R}^n$) tal que*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{bmatrix},$$

com matrizes quadradas A_1 e A_2. Se tal é possível, então A é dita ***redutível****. Particularmente, se $A = [a_{ij}]$ é tal que $a_{ij} > 0$, para todo i,j, então A é irredutível.*

Os teoremas A e B podem ser encontrados, respectivamente, em Deimling [10], página 226 e Greenhalgh [18].

Teorema A: *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$, com $a_{ij} \geq 0$ para todo $i,j \leq n$ ($A \geq 0$ para simplificar). Então*

i) $r(A)$ é um autovalor A com autovetor positivo. Se $B \geq 0$ e $A - B \geq 0$, então $r(A) \geq r(B)$.

ii) Se A é irredutível, então $r(A)$ é um autovalor simples com autovetor em $int\left(\mathbf{R}_+^n\right)$.

iii) Se $a_{ij} > 0$ para todo i,j, então $|\lambda| < r(A)$ para todos os autovalores $\lambda \neq r(A)$.

Teorema B: *Seja*

$$F(k,\eta) = \det(A(k) - \eta Id)$$

a equação polinomial onde $A(k)$ *é uma matriz* $n \times n$. *Suponhamos que*

i) $F(k,\eta)$ *é contínua em* k *para* k *real, contínua à direita em* $k = 0$, *e analítica na variável complexa* η *para* $\eta \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ *um domínio em* $\mathbf{C}$.

ii) $r(A(k))$ *é uma raíz simples de* $F(k,\eta)$.

iii) $r(A(k))$ *é estritamente monótona decrescente em* k.

Então $r(A(k))$ *é contínua em* k *para* $k > 0$ *e contínua à direita em* $k = 0$.

Por definição $r(S(\omega)) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ é um autovalor de } S(\omega)\}$, e sendo λ um autovalor da matriz $S(\omega)$, segue que λ é raíz da equação polinômial em x

$$P(x,\omega) = \det[S(\omega) - xId].$$

Como $S_{ij}(\omega) > 0$ para todo i,j, a matriz $S(\omega)$ é irredutível. Usando o Teorema A segue que $r(S(\omega))$ é um autovalor simples com autovetor em $int(R^n_+)$.

Tomando $A(\omega) = S(\omega)$ e $F(\omega,\eta) = \det[S(\omega) - \eta Id]$, pelo Teorema B temos que $r(S(\omega))$ é uma função contínua em ω, particularmente,

$$\lim_{\varpi \to \infty} r(S(\omega)) = r\left(\lim_{\varpi \to \infty} S(\omega)\right) = r(0) = 0.$$